110 學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)

筆試（一）試題卷

編號：__________________（學生自填）

注意事項：

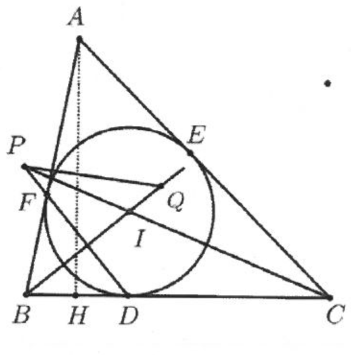
(1) 時間：2 小時（13:30～15:30）
(2) 配分：每題皆為 7 分
(3) 不可使用計算器
(4) 請將答案依序寫在答案卷內
(5) 學生自評預估得分(每題 0~7 分)

一、試求所有不小於 1 的實數 x,y,z，滿足

$$\min\left\{\sqrt{x+xyz},\ \sqrt{y+xyz},\ \sqrt{z+xyz}\right\}=\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}，$$

其中 $\min\{p,q,r\}$ 表示 p,q,r 三數的最小值。

二、如圖，ΔABC 的內心為 I，其內切圓與 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 的切點分別是 D,E,F。直線 $\overleftrightarrow{CI},\overleftrightarrow{DF}$ 交於點 P，點 Q 在 $\overline{BI}$ 的延長線上，它與 B 在直線 $\overleftrightarrow{PC}$ 的相反兩側，且滿足 $\overline{PQ}+\overline{BC}=s$，其中 s 是 ΔABC 的半周長。令 $\overline{AH}$ 垂直 $\overline{BC}$ 於點 H。試證： (1) A,I,F,P 四點共圓； (2) P,Q,D,H 四點共圓。



三、設 $\langle a_n\rangle$ 及 $\langle b_n\rangle$ 為公比不相等的兩個等比數列，而 $c_n=\alpha a_n+\beta b_n$ 都不等於 0，其中 α,β 為非零實數。令 n 次多項式 $f_n(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$。已知對於正整數 $n\ge 2$，多項式 $f_n(x)+x^2f_{n-2}(x)$ 除以 $xf_{n-1}(x)$ 的餘式皆為次數小於或等於 1 的多項式，試證：乘積 a_nb_n 是一與 n 無關的常數。

110學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)

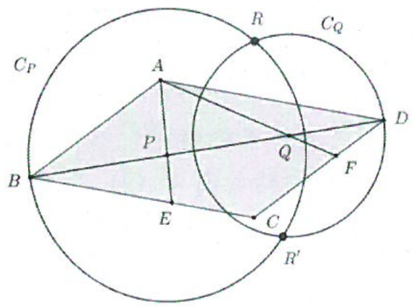
筆試（二）試題卷

編號：________________（學生自填）

注意事項：

(1) 時間：2 小時（16:00～18:00）
(2) 配分：每題皆為 7 分
(3) 不可使用計算器
(4) 請將答案依序寫在答案卷內
(5) 學生自評預估得分(每題 0 ~7 分)

一、在平行四邊形 $ABCD$ 中，點 E 在 $\overline{BC}$ 上，點 F 在 $\overline{CD}$ 上，且 $\overline{AE}$ 交 $\overline{BD}$ 於點 P，$\overline{AF}$ 交 $\overline{BD}$ 於點 Q。設 C_P 是以 P 為圓心、$\overline{BP}$ 為半徑的圓，而 C_Q 是以 Q 為圓心、$\overline{QD}$ 為半徑的圓，且兩圓的交點為 R, R'。試證：$\overline{BE}\times\overline{DF}=\overline{CE}\times\overline{CF}$ 的充要條件為 $\angle BRD = 120°$。



二、試問有多少組整數數對 (a,b)，滿足 $1\le a\le b\le 2021$，且 $\dfrac{ab^2+a+b}{a^2b+a+9}$ 為整數？

三、用 0 和 1 排成的 n 項數列中，滿足連續兩項為 0,0 的組數與連續兩項為 1,1 的組數相等之數列稱為「n 項的平衡數列」。例如：8 項數列 0,0,0,1,1,0,1,1 中，連續兩項為 0,0 的有 2 組，連續兩項為 1,1 的也有 2 組；因此，數列 0,0,0,1,1,0,1,1 為「8 項的平衡數列」。試問對任意的正整數 n，有多少種 n 項的平衡數列？

110 學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)

口 試 試 題

注意事項：

(1) 試卷共 2 題，參賽者可先在本試卷上作答，思考時間 20 分鐘；
(2) 攜帶本試卷到口試教室應試，答辯時間 20 分鐘，並繳回本試卷；
(3) 口試完成後由助理引導至 M212 教室，繼續作答獨立研究。

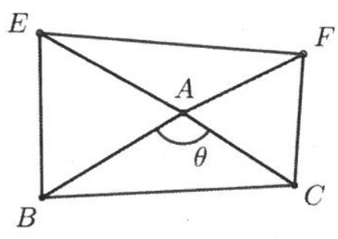
學生編號：______________

一、 設有 n 張牌，分別寫上 $1,2,3,\cdots,n$。對任意牌型 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，進行以下操作：若 a_n 為奇數，則將 a_n 置於最前面，即得新牌型 $a_n,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$；若 a_n 為偶數，則將 a_n 置於 a_1 與 a_2 之間，即得新牌型 $a_1,a_n,a_2,\cdots,a_{n-1}$。試證：當 a_1 為奇數時，經過連續操作多次後可回到原牌型，並求此最少的操作次數。

【解答】

二、 如圖，在 ΔABC 的邊 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的外側分別作兩正三角形 ΔABE 及 ΔACF。已知 $\overline{AC}=1$ 且 $\overline{EF}=2$。試求 ΔABC 面積的最大可能值。

【解答】



110 學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)
獨立研究（一）試題卷

注意事項：

(1) 三題中自選兩題作答，並請註明題號
(2) 時間：1.5 小時（8:30～10:00）
(3) 配分：每題皆為 7 分
(4) 不可使用計算器
(5) 請將答案寫在答案卷內

學生編號：______________

一、設 D, E, F 分別是 ΔABC 三邊 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 上的點。試證：在 $\Delta AEF, \Delta BDF$, ΔCDE 中，至少有一個三角形的面積不大於 ΔDEF 的面積。

二、將 $3,4,5,6,\cdots,1155$ 這 1153 個正整數重新排成一個數列 $\langle a_k \rangle$，使得對每一個 $k=1,2,3,\cdots,1153$，第 k 項 a_k 都是 k 的倍數。試問共有多少種不同的排法？

三、有一群人，人數至少 100 人，其中任意兩人或者彼此認識，或者彼此不認識。現在想將這群人分組（每一組至少一人，各組人數可以不相等）。如果每一組中的任意兩人都彼此不認識，稱為「好分組」。已知不管怎麼分，都無法分成 99 組的「好分組」，但是可以有分成 100 組的「好分組」。試證：在分成 100 組的「好分組」中，都可以在第 k 組中選出一個人 v_k，使得對每一個 $k=1,2,3,\cdots,99$，都有 v_k 認識 v_{k+1}。

110 學年度普通型高級中學數學科能力競賽(決賽)
獨立研究（二）試題卷

注意事項：

(1) 三題中自選兩題作答，並請註明題號
(2) 時間：1.5 小時（10:20～11:50）
(3) 配分：每題皆為 7 分
(4) 不可使用計算器
(5) 請將答案寫在答案卷內

學生編號：______________

一、 試求滿足下列條件的最小正整數 n：當整係數多項式函數 $f(x)$ 有 n 個相異整數 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，滿足 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=1$ 時，方程式 $f(x)=3$ 就不會有整數解。

二、 試證：不存在任何的正整數解 (x,y,z,w)，滿足下列方程式：

$$4x^4+9y^4=11(z^4+w^4)$$ 。

三、將邊長為 3 的正三角形分成九個全等的單位三角形。一開始每個單位三角形裡都填 0。每次操作可以選擇兩個相鄰的單位三角形（相鄰意為有共同邊）而將這兩個三角形內的數字都同時加 1 或同時減 1。已知經由若干次操作後，九個數恰好形成連續的正整數 $n,(n+1),\cdots,(n+8)$ ，試求所有可能的 n 值。

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽) 試題解答

題目：

試求所有不小於 1 的實數 x,y,z ，滿足

$$\min\left\{\sqrt{x+xyz},\ \sqrt{y+xyz},\ \sqrt{z+xyz}\right\}=\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\text{，}\qquad(1)$$

其中 $\min\{p,q,r\}$ 表示 p,q,r 三數的最小值。

解析	類　　型	■ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)			
	試題出處	■ 自編　　□ 改編於：			
	難 易 度	□ 難　■中等　□易	編 號	筆試一(1)	

解答：

先考慮 $z=\min\{x,y,z\}$ ，並令 $x=1+a^2,\ \ y=1+b^2,\ \ z=1+c^2$ ，其中 $a\geq c\geq 0, b\geq c\geq 0$ 。
在這些設定條件下，(1)式等價於

$$(1+c^2)(1+(1+a^2)(1+b^2))=(a+b+c)^2\text{。}\qquad(2)$$

由柯西不等式

$$(c^2+1)(1+(a+b)^2)\geq(a+b+c)^2\text{。}\qquad(3)$$

由(2)式與(3)式可得

$$(a+b)^2\geq(1+a^2)(1+b^2)\text{。}\qquad(4)$$

另一方面，由柯西不等式 $(a^2+1)(1+b^2)\geq(a+b)^2$ ；因此，上面的不等式均為等號。所以 $ab=1$ ，且 $c(a+b)=1$ 。

反之，若 $ab=1$ 且 $c(a+b)=1$ ，則 $c=\dfrac{1}{a+b}<\dfrac{1}{b}=a$ ， $c=\dfrac{1}{a+b}<\dfrac{1}{a}=b$ 。

故，此情況下問題之解為

$$x=1+a^2,\ \ y=1+\frac{1}{a^2},\ \ z=1+\left(\frac{a}{1+a^2}\right)^2\text{，其中 } a \text{ 可以是任意不小於 1 的正數。}$$

當然 $x,\ y,\ z$ 重排也是解 (因為也可設 b 或 a 是 $a,\ b,\ c$ 中最小的)。

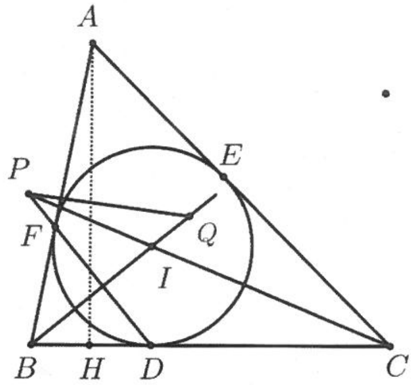
110 學年度高中數學能力競賽 (決賽) 試題解答

題目：

如圖，ΔABC 的內心為 I，其內切圓與 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 的切點分別是 D, E, F。直線 $\overleftrightarrow{CI}, \overleftrightarrow{DF}$ 交於點 P，點 Q 在 $\overline{BI}$ 的延長線上，它與 B 在直線 $\overleftrightarrow{PC}$ 的相反兩側，且滿足 $\overline{PQ}+\overline{BC}=s$，其中 s 是 ΔABC 的半周長。令 $\overline{AH}$ 垂直 $\overline{BC}$ 於點 H。試證：

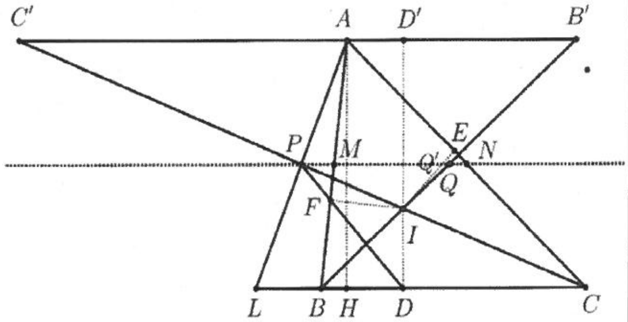
(1) A, I, F, P 四點共圓；

(2) P, Q, D, H 四點共圓。



解析	類　型	☐ 代數(A)　☐ 數論(N)　■ 幾何(G)　☐ 組合(C)			
	試題出處	■ 自編　☐ 改編於：			
	難易度	☐ 難　■ 中等　☐ 易	編號	筆試一(2)	

解答：



1. 設 M, N 分別為 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 的中點，且 $\overline{BC}=a, \overline{CA}=b, \overline{AB}=c$。因為

$$\begin{aligned}\angle DPC &= \angle PDB - \tfrac{1}{2}\angle C = \angle FIB - \tfrac{1}{2}\angle C \\ &= 90^\circ - \tfrac{1}{2}\angle B - \tfrac{1}{2}\angle C = \tfrac{1}{2}\angle A,\end{aligned}$$

即 $\angle FPI = \angle FAI$，得 A, I, F, P 共圓，

所以 $\angle API = \angle AFI = 90^\circ$。

令 L 為 $\overleftrightarrow{AP}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 的交點，因 $\overleftrightarrow{CI}$ 是分角線，

P 為 $\overline{AL}$ 的中點，故 P 是在 $\overleftrightarrow{MN}$ 上。

2. 設過 A 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 平行的直線與 $\overleftrightarrow{BI}, \overleftrightarrow{CI}$ 分別交於 B', C'。因 $\angle AB'B = \angle B'BC = \angle ABB'$，

$\overline{AB'} = \overline{AB} = c$；同理 $\overline{AC'} = \overline{AC} = b$。所以，得 $\overline{B'C'} = b+c$。由此可得

$$\frac{\overline{C'I}}{\overline{CI}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{b+c}{a},\quad \frac{\overline{CP}}{\overline{CI}} = \frac{\overline{CC'}/2}{\overline{CI}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{C'I}+\overline{CI}}{\overline{CI}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(b+c)+a}{a} = \frac{s}{a}\text{。}$$

設 Q' 是 $\overleftrightarrow{BI}$ 與 $\overleftrightarrow{MN}$ 的交點，則 PQ'□BC，$\dfrac{\overline{PQ'}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{PI}}{\overline{CI}} = \dfrac{\overline{CP}-\overline{CI}}{\overline{CI}} = \dfrac{s-a}{a} = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{BC}}$。所以，

$\overline{PQ'} = \overline{PQ}$；得 Q' 與 Q 重合（因 $BFID$ 是箏形，得 $PD \perp BI$，且 Q' 與 B 在 $\overleftrightarrow{CI}$ 的相反兩側）。

3. 因 Q 是在 $\overleftrightarrow{MN}$ 及分角線上，用與 **1**. 同樣的證明可得 $\angle AQB = 90^\circ$. 所以 P, Q 是在以 $\overline{AI}$ 為直徑的圓（記為 K）上（此圓也通過 E, F）。設 $\overleftrightarrow{DI}$ 與 $\overleftrightarrow{B'C'}$ 交於點 D', 則 D' 是在圓 K 上。因 H, D 分別是 A, D' 對 MN 的對稱點，且 P, Q, D', A 共圓，所以，P, Q, D, H 也共圓。

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽) 試題解答

題目：

設$\langle a_n\rangle$及$\langle b_n\rangle$為公比不相等的兩個等比數列，而$c_n=\alpha a_n+\beta b_n$都不等於0，其中α,β為非零實數。令n次多項式$f_n(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$。已知對於正整數$n\ge 2$，多項式$f_n(x)+x^2f_{n-2}(x)$除以$xf_{n-1}(x)$的餘式皆為次數小於或等於$1$的多項式，試證：乘積$a_nb_n$是一與$n$無關的常數。

解析		
類　　型	■ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)	
試題出處	■ 自編　　□ 改編於：	
難易度	■ 難　□ 中等　□ 易	編號：筆試一(3)

解答： 對於整數$n\ge 2$，

$$f_n(x)+x^2f_{n-2}(x)=c_0+c_1x+\sum_{i=2}^{n}(c_i+c_{i-2})x^i\text{，}$$

而$xf_{n-1}(x)=\sum_{i=0}^{n-1}c_ix^{i+1}$。由於

$$\deg\left(f_n(x)+x^2f_{n-2}(x)\right)\le\deg\left(xf_{n-1}(x)\right)\text{，}$$

因此，$f_n(x)+x^2f_{n-2}(x)=\lambda_nxf_{n-1}(x)+r_n(x)$，其中$r_n(x)=0$或$\deg r_n(x)<\deg\left(xf_{n-1}(x)\right)$。比較$x^{n-1}$項的係數，得$c_{n-1}+c_{n-3}=\lambda_nc_{n-2}$。

同理，由$f_{n-1}(x)+x^2f_{n-3}(x)=\lambda_{n-1}xf_{n-2}(x)+r_{n-1}(x)$，再比較$x^{n-1}$項的係數，得知$c_{n-1}+c_{n-3}=\lambda_{n-1}c_{n-2}$。因此，$\lambda_n=\lambda_{n-1}$，故$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=\lambda$，其中$\lambda$為常數。

由題目所給的條件$\deg r_n(x)\le 1$，可知

$$r_n(x)=f_n(x)+x^2f_{n-2}(x)-\lambda xf_{n-1}(x)=c_0+(c_1-\lambda c_0)x\text{，}$$

且對於所有大於或等於 2 的整數n皆有$c_n+c_{n-2}=\lambda c_{n-1}$。

調整條件中的α,β，不失一般性，可假設$a_n=r_1^n$，$b_n=r_2^n$，其中r_1,r_2為非零實數。注意：$c_n=\alpha r_1^n+\beta r_2^n=(\alpha r_1^2)r_1^{n-2}+(\beta r_2^2)r_2^{n-2}$，且

$$\lambda c_{n-1}-c_{n-2}=\alpha(\lambda r_1-1)r_1^{n-2}+\beta(\lambda r_2-1)r_2^{n-2}\text{。}$$

由數列c_n的遞迴式$c_n=\lambda c_{n-1}-c_{n-2}$，得

$$(\alpha r_1^2)r_1^{n-2}+(\beta r_2^2)r_2^{n-2}=\alpha(\lambda r_1-1)r_1^{n-2}+\beta(\lambda r_2-1)r_2^{n-2}\text{，}\forall n\ge 2\text{。}\qquad(1)$$

以下我們要證明：$r_i^2=\lambda r_i-1,\ i=1,2$。這可以分兩種情況討論如下：

(A) $\left|\dfrac{r_1}{r_2}\right|\neq 1$：若$\left|\dfrac{r_1}{r_2}\right|<1$，則式(1)等同於

$$\left(\alpha r_1^{\ 2}\right)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n-2}+\left(\beta r_2^{\ 2}\right)=\alpha\left(\lambda r_1-1\right)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n-2}+\beta\left(\lambda r_2-1\right)，\forall n\geq 2。$$

令$n\to\infty$，得$\beta r_2^{\ 2}=\beta\left(\lambda r_2-1\right)\Rightarrow r_2^{\ 2}=\lambda r_2-1$代入上式，則有

$$\alpha r_1^{\ 2}=\alpha\left(\lambda r_1-1\right)\Rightarrow r_1^{\ 2}=\lambda r_1-1。$$

由對稱性，若$\left|\dfrac{r_1}{r_2}\right|>1$亦可得相同結論。

(B) $\left|\dfrac{r_1}{r_2}\right|=1$：則$r_2=r_1$或$-r_1$. 我們有$c_n=\left(\alpha+\beta\right)r_1^{\ n}$或$c_n=\left(\alpha+\left(-1\right)^n\beta\right)r_1^{\ n}$，$\forall n\geq 0$。

再由c_n的遞迴式$c_n=\lambda c_{n-1}-c_{n-2}$，亦可得出$r_1^{\ 2}=\lambda r_1-1$（此時必然是$r_2=r_1=1$）。

綜合以上的討論得知：$r_1,\ r_2$是二次方程$x^2-\lambda x+1=0$的兩個根，再由根與係數的關係知道：$r_1r_2=1$。所以，$a_nb_n=r_1^{\ n}r_2^{\ n}=1$為一個與$n$無關的常數。

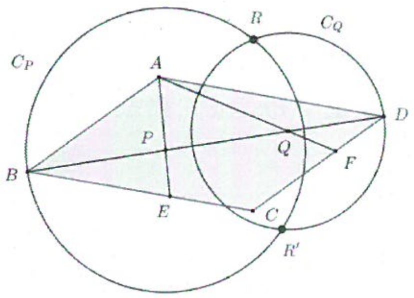
110 學年度高中數學能力競賽 (決賽) 試題解答

題目：

在平行四邊形 $ABCD$ 中，點 E 在 $\overline{BC}$ 上，點 F 在 $\overline{CD}$ 上，且 $\overline{AE}$ 交 $\overline{BD}$ 於點 P，$\overline{AF}$ 交 $\overline{BD}$ 於點 Q。設 C_P 是以 P 為圓心、$\overline{BP}$ 為半徑的圓，而 C_Q 是以 Q 為圓心、$\overline{QD}$ 為半徑的圓，且兩圓的交點為 R, R'。試證：$\overline{BE}\times\overline{DF}=\overline{CE}\times\overline{CF}$ 的充要條件為 $\angle BRD=120°$。

解析		
類　型	□ 代數(A)　□數論(N)　■ 幾何(G)　□ 組合(C)	
試題出處	■ 自編　□ 改編於：	
難 易 度	□ 難　□ 中等　■ 易	編 號：筆試二(1)

解答：



為了簡潔，令 $\overline{BP}=a$, $\overline{PQ}=c$, $\overline{QD}=b$。

因為 $\overline{BP}=\overline{RP}$，所以 $\angle PBR=\angle PRB\equiv\alpha$。同理，因為 $\overline{QR}=\overline{QD}$，所以 $\angle QRD=\angle QDR\equiv\beta$。

由 ΔBDR 內角和為 $180°$，得知 $2\alpha+2\beta+\angle PRQ=180°$，故 $\alpha+\beta=90°-\dfrac{1}{2}\angle PRQ$。因此，$\angle BRD=\alpha+\beta+\angle PRQ=90°+\dfrac{1}{2}\angle PRQ$。由此可知：$\angle BRD=120° \Leftrightarrow \angle PRQ=60°$。

再由餘弦定理，得知：上式也等價於

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\cos\angle PRQ=\frac{1}{2}，即 c^2=a^2+b^2-ab，亦即 \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}=1。$$

另一方面，利用 ΔPBE □ ΔPDA，得 $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{BC}}=1-\dfrac{\overline{CE}}{\overline{BC}}$。同理，由 ΔQFD □ ΔQAB，得到 $\dfrac{b}{a+c}=\dfrac{\overline{DF}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{DF}}{\overline{CD}}$。因此，

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}=1 \Leftrightarrow \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{CF}} \Leftrightarrow \overline{BE}\times\overline{DF}=\overline{CE}\times\overline{CF}。證畢！$$

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽) 試題解答

<table>
<tr><td colspan="4">題目：
試問有多少組整數數對 (a,b)，滿足 $1\le a\le b\le 2021$，且 $\dfrac{ab^2+a+b}{a^2b+a+9}$ 為整數？</td></tr>
<tr><td rowspan="3">解析</td><td>類　型</td><td colspan="2">☐ 代數(A)　■ 數論(N)　☐ 幾何(G)　☐ 組合(C)</td></tr>
<tr><td>試題出處</td><td colspan="2">☐ 自編　■ 改編於：IMO shortlisted problem</td></tr>
<tr><td>難易度</td><td>☐ 難　■ 中等　☐ 易</td><td>編 號　筆試二(2)</td></tr>
</table>

解答：

設 $A=a^2b+a+9$，$B=ab^2+a+b$。由題意知：A 能整除 $aB-bA=a^2-9b$。

(1) 若 $a^2-9b\ge 0$，則因 $A>a^2-9b$，可知 $a^2-9b=0 \Rightarrow 9\,|\,a^2$。

設 $a=3k$，$b=k^2$ 分別代入 A,B，可得 $A=3\left(3k^4+k+3\right)$，$B=k\left(3k^4+k+3\right)$。

又 $A\,|\,B \Leftrightarrow 3\,|\,k$，可令 $k=3m$，其中 m 為正整數。因此，$a=9m, b=9m^2$。

又 $1\le a\le b\le 2021$，得 $m=1,2,3,\cdots,14$。

(2) 若 $a^2-9b<0$，則 $9b-a^2\ge A$，即 $(9-a^2)b\ge a^2+a+9 \Rightarrow a^2<9$，故 $a=1$ 或 2。

(i) $a=1 \Rightarrow A=b+10,\ b+10\,|\,9b-1$，

又 $9b-1=9(b+10)-91 \Rightarrow b+10\,|\,91$。

由 $91=1\times 91=7\times 13$，可得 $b=3$ 或 81。

檢驗 $(1,3),(1,81)$ 均能使 $A\,|\,B$。

(ii) $a=2 \Rightarrow A=4b+11,\ 4b+11\,|\,9b-4$，

又 $4(9b-4)=9(4b+11)-115 \Rightarrow 4b+11\,|\,115$。

由 $115=1\times 115=5\times 23$，可得 $b=3$ 或 26。

檢驗 $(2,3),(2,26)$ 均能使 $A\,|\,B$。

因此，可能的數對 (a,b) 為 $(9m,9m^2)$，其中 $m=1,2,3,\cdots,14$，以及 $(1,3),(1,81),(2,3),(2,26)$，共 18 組。

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽) 試題解答

題目：

用 0 和 1 排成的 n 項數列中，滿足連續兩項為 0,0 的組數與連續兩項為 1,1 的組數相等之數列稱為「n 項的平衡數列」。例如：8 項數列 0,0,0,1,1,0,1,1 中，連續兩項為 0,0 的有 2 組，連續兩項為 1,1 的也有 2 組；因此，數列 0,0,0,1,1,0,1,1 為「8 項的平衡數列」。試問對任意的正整數 n ，有多少種 n 項的平衡數列？

解析	類　型	□ 代數(A)　□ 數論(N)　□幾何(G)　■ 組合(C)		
	試題出處	■ 自編　□ 改編於：		
	難 易 度	■ 難　□ 中等　□ 易	編 號	筆試二(3)

解答：

設有 a_n 種「n 項的平衡數列」。顯然，$a_1 = 2$；以下考慮 $n \geq 2$。

對一個「n 項的平衡數列」，令 p_k 表示數列中第 k 個 0 區塊數字 0 的個數，而 q_k 表示數列中第 k 個 1 區塊數字 1 的個數；例如：「8 項的平衡數列」0,0,0,1,1,0,1,1 中，$p_1 = 3, p_2 = 1$；而 $q_1 = q_2 = 2$。則該數列連續兩項為 0,0 的組數為 $\sum_{k=1}^{r}(p_k - 1)$，而連續兩項為 1,1 的組數為 $\sum_{k=1}^{s}(q_k - 1)$，其中

$s = r$ (當首項與末項的數字不同) 或 $|s - r| = 1$ (當首項與末項的數字相同)。

因此，數列是「n 項的平衡數列」的充要條件為 $\sum_{k=1}^{r}(p_k - 1) = \sum_{k=1}^{s}(q_k - 1)$，

即 $\sum_{k=1}^{r} p_k - \sum_{k=1}^{s} q_k = r - s$。又 $\sum_{k=1}^{r} p_k + \sum_{k=1}^{s} q_k = n$ ，解得：

$$\sum_{k=1}^{r} p_k = \frac{n}{2} + \frac{r-s}{2}，\sum_{k=1}^{r} q_k = \frac{n}{2} - \frac{r-s}{2}。$$

(i) 當 n 為偶數時，$r-s=2\sum_{k=1}^{r} p_k - n$ 亦為偶數，故 $s=r$；由此可得：每一個「n 項的平衡數列」的首項與末項的數字不同，且數字 0 與數字 1 各出現 $\frac{n}{2}$ 次。其中，首項為 0 與末項為 1 的「n 項的平衡數列」有 $C^{n-2}_{\frac{n-2}{2}}$ 種，而首項為 1 與末項為 0 的「n 項的平衡數列」也有 $C^{n-2}_{\frac{n-2}{2}}$ 種；故 $a_n=2C^{n-2}_{\frac{n-2}{2}}$。

(ii) 當 n 為奇數時，$r-s=2\sum_{k=1}^{r} p_k - n$ 亦為奇數，故 $|s-r|=1$；由此可得：每一個「n 項的平衡數列」的首項與末項的數字相同，且數字 0 與數字 1 出現的次數相差 1 次。因此，$a_n=2C^{n-2}_{\frac{n-1}{2}}$。

合併上述的結果，可得對任意正整數 n，$a_n=2C^{n-2}_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil -1}$。

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽) 試題解答

題目：

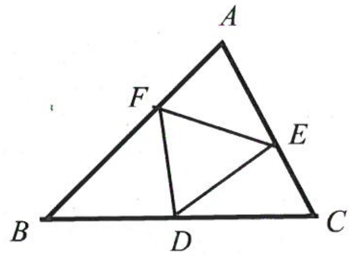
設 $D\,,E\,,F$ 分別是 ΔABC 三邊 $\overline{BC}\,,\overline{CA}\,,\overline{AB}$ 上的點。試證: $\Delta AEF,\Delta BDF,\Delta CDE$ 中至少有一個三角形的面積不大於 ΔDEF 的面積。

<table>
<tr><td rowspan="3">解析</td><td>類　　型</td><td colspan="3">■ □ 代數(A)　□ 數論(N)　幾何(G)　□ 組合(C)</td></tr>
<tr><td>試題出處</td><td colspan="3">■ 自編　□ 改編於：</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>□ 難　□ 中等　■ 易</td><td>編 號</td><td>獨立研究一(1)</td></tr>
</table>

解答：

設 $\alpha=\dfrac{\Delta AEF}{\Delta ABC},\beta=\dfrac{\Delta BDF}{\Delta ABC},\gamma=\dfrac{\Delta CDE}{\Delta ABC},\delta=\dfrac{\Delta DEF}{\Delta ABC}$，可知 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$。

不失一般性，可設 $\alpha\ge\beta\ge\gamma$。



(1) 若 $\alpha\le\dfrac{1}{4}$，則有 $\delta=1-\alpha-\beta-\gamma\ge1-\dfrac{1}{4}\times3=\dfrac{1}{4}\ge\alpha$，

故得到 $\delta\ge\min\{\alpha\,,\beta\,,\gamma\}$。

(2) 若 $\alpha>\dfrac{1}{4}$，令 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\lambda\,,\dfrac{\overline{CE}}{\overline{CA}}=\mu\,,\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AB}}=\nu$，所以 $0\le\lambda\,,\mu\,,\nu\le1$。

利用 $\dfrac{\Delta AEF}{\Delta ABC}=\dfrac{\overline{AF}\times\overline{AE}}{\overline{AB}\times\overline{AC}}=\nu\times(1-\mu)$，可得到 $\alpha=\nu(1-\mu)$。

同理，$\beta=\lambda(1-\nu)\,,\gamma=\mu(1-\lambda)$。

由此可知

$$\begin{aligned}\delta&=1-\alpha-\beta-\gamma=1-\nu(1-\mu)-\lambda(1-\nu)-\mu(1-\lambda)\\&=1-\nu+\nu\mu+\lambda+\lambda\nu+\mu+\mu\lambda=\lambda\mu\nu+(1-\mu)(1-\nu)(1-\lambda)\text{。}\end{aligned}$$

再利用不等式 $(k_1+k_2)^2\ge4k_1k_2$，$\alpha>\dfrac{1}{4}$，以及 $\alpha\ge\beta\ge\gamma$，可進一步得到

$$\delta^2\ge4\lambda\mu\nu(1-\mu)(1-\nu)(1-\lambda)=4\alpha\beta\gamma>\beta\gamma\ge\gamma^2\text{，}$$

亦即 $\delta\ge\gamma$，故 $\delta\ge\min\{\alpha\,,\beta\,,\gamma\}$，證畢！

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽) 試題解答

題目：

將 $3,4,5,6,\cdots,1155$ 這 1153 個正整數重新排成一數列 $\langle a_k \rangle$，使得對每一個 $k=1,2,3,\cdots,1153$，第 k 項 a_k 都是 k 的倍數。試問共有多少種不同的排法？

解析	類　型	□ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　■ 組合(C)		
	試題出處	□ 自編　■ 改編於：大陸競賽試題		
	難易度	□ 難　□ 中等　■ 易	編號	獨立研究一(2)

解答：

因為 a_k 為 k 的倍數，故 1154 及 1155 只能排在以自己因數為號碼的位置上。

又 $1155 = 3 \times 5 \times 7 \times 11$，$1154 = 2 \times 577$，所以，

$1155=a_m, 1154=a_n$，其中 m 為 $3\times5\times7\times11$ 的因數，n 為 2×557 的因數。

注意：$1155 \neq a_{1153}$ 且 $1154 \neq a_{1153}$。又 1153 為質數，故 $1153=a_1$ 或 $1153=a_{1153}$。

當排好 1155 的位置後，1154 只能排在第 2 號位置，否則會發生小數排在大號碼的情形，則不符合條件。因此，僅需考慮 1155 的因數排法。

為方便算法，我們以符號 $(a,b,c,\cdots)$ 記錄 1155 的因數排法。例如：$1155=a_{385}$、$385=a_{77}$、$77=a_{11}$、$11=a_1$，記為 $(3,5,7,11)$；而 $1155=a_{385}$、$385=a_{55}$、$55=a_{11}$、$11=a_1$ 時，記為 $(3,7,5,11)$；又如：$1155=a_{385}$、$385=a_{77}$、$77=a_1$ 時，記為 $(3,5,7\times11)$。

(1) 若 1155 排第 1 號位置，即 $1155=a_1$，則 $1154=a_2$，其他的數只能排在以自己為號碼的位置上，否則會發生小數排在大號碼的情形。

(2) 以 3 為首的排列共有 13 種：即 $(3,5,7,11)$ 有 $3!=6$ 種、$(3,5,7\times11)$ 有 $C^3_1=3$ 種、$(3,5\times7,11)$ 有 $C^3_1=3$ 種、$(3,5\times7\times11)$ 有 $C^3_3=1$ 種。同理，分別以 5, 7, 11 為首的也各有 13 種。因此共有 $13\times4=52$ 種。

(3) 形如 3×5 為首有 3 種：即 $(3\times5,7,11),(3\times5,11,7),(3\times5,7\times11)$。故此類型共有 $C^4_2\times3=18$ 種。

(4) 形如 $3\times5\times7$ 為首有 1 種：即 $(3\times5\times7,11)$，故此類型共有 $C^4_3\times1=4$ 種。

所以，共有 $1+52+18+4=75$ 種。

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽) 試題解答

題目：

有一群人，人數至少 100 人，其中任意兩人或者彼此認識，或者彼此不認識。現在想將這群人分組（每一組至少一人，各組人數可以不相等）。如果每一組中的任意兩人都彼此不認識，稱為「好分組」。已知不管怎麼分，都無法分成 99 組的「好分組」，但是可以有分成 100 組的「好分組」。試證：在分成 100 組的「好分組」中，都可以在第 k 組中選出一個人 v_k，使得對每一個 $k=1,2,3,\cdots,99$，都有 v_k 認識 v_{k+1}。

解析				
	類　型	□ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　■ 組合(C)		
	試題出處	■ 自編　□ 改編於：		
	難易度	□ 難　■ 中等　□ 易	編 號	獨立研究一(3)

解答：

考慮圖 $G(V,E)$，以這群人為頂點(vertex)，當中彼此認識時連一條邊(edge)。

已知著色數(chromatic number) $\chi(G)=100$，我們要證明：

對於著色數 $\chi(G)=n$ 的圖形（色彩種類 $c_1,c_2,\cdots,c_n$），給定任何一種著色方式，總是可以找到一條路徑(path) $v_1v_2\cdots v_n$，其中頂點 v_k 的著色為 c_k。

以非空集合 V_1 表示著上色彩 c_1 的頂點集合，並以 V_k 表示著上色彩 c_k 且至少有一個鄰點(neighbour)著上色彩 c_{k-1} 的頂點所成的集合。我們肯定 $V_k\neq\varnothing$，對 $2\le k\le n$ 皆如此。事實上，如果首先出現空集合的 V_k 的標號為 m，從 $1\le k\le m-1$，逐一將 V_k 中的頂點著上色彩 c_{k+1}，這樣的著色方式將只需要 $n-1$ 種色彩，與 $\chi(G)=n$ 矛盾。

現在，從 V_n 的某個頂點 v_n 開始，從 V_{n-1} 中挑選 v_{n-1}，使得 $v_{n-1}v_n$ 相鄰，再從 V_{n-2} 中挑選 v_{n-2}，使得 $v_{n-2}v_{n-1}$ 相鄰，以此類推，即可得到一條路徑 $v_1v_2\cdots v_n$。

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽) 試題解答

題目：

試求滿足下列條件的最小正整數 n：

當整係數多項式函數 $f(x)$ 有 n 個相異整數 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，滿足 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=1$ 時，方程式 $f(x)=3$ 就不會有整數解。

<table>
<tr><td rowspan="3">解析</td><td>類　型</td><td colspan="3">■ 代數(A)　□ 數論(N)　□ 幾何(G)　□ 組合(C)</td></tr>
<tr><td>試題出處</td><td colspan="3">■ 自編　□ 改編於：</td></tr>
<tr><td>難易度</td><td>□難　□中等　■易</td><td>編號</td><td>獨立研究二(1)</td></tr>
</table>

解答：

$n=1,2$ 時，顯然不合題意。

$n=3$ 時，取 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)+1$， 則 $f(-1)=f(1)=f(2)=1$，而 $f(0)=3$。

故 $n=3$ 也不滿足題意之條件。

對 $n\geq 4$ 時，可設 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)g(x)+1$，其中 $g(x)$ 是整係數多項式函數。假設存在某個整數 m，使得 $f(m)=3$，則

$$(m-x_1)(m-x_2)\cdots(m-x_n)g(m)=2\text{。}$$

由 $|g(m)|\geq 1$，可得 $|(m-x_1)(m-x_2)\cdots(m-x_n)|\leq 2$。　　(*)

這些 $m-x_1,m-x_2,\cdots,m-x_n$ 均非零且都相異，但 4 個以上非零的相異整數乘積的絕對值至少為 4，此與(*)矛盾。因此，最小正整數 $n=4$。

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽) 試題解答

題目：

試證：不存在任何的正整數解 (x,y,z,w)，滿足下列方程式：

$$4x^4+9y^4=11(z^4+w^4)\text{ 。} \qquad (1)$$

解析	類　　型	☐ 代數(A)　■ 數論(N)　☐ 幾何(G)　☐ 組合(C)		
	試題出處	■ 自編　　☐ 改編於：		
	難 易 度	☐ 難　■ 中等　☐ 易	編 號	獨立研究二(2)

解答：

1. 首先證明：下列方程式沒有任何的正整數解 (x,y,z,w)

$$x^2+y^2=11(z^2+w^2)\text{ 。} \qquad (2)$$

令

$$S=\{\ (x,y,z,w)\ |\ \ (x,y,z,w)\text{ 為方程式 (2)的正整數解 }\}\text{。}$$

假設 S 不為空集合，則存在 $(x_1,y_1,z_1,w_1)\in S$ 滿足

$$m=\min_{(x,y,z,w)\in S}(x+y+z+w)=x_1+y_1+z_1+w_1>0 \qquad (3)$$

且 $x_1^2+y_1^2=11(z_1^2+w_1^2)$. (4)

由(4)式我們容易得到 11 都必須整除 x_1 與 y_1。

可設 $x_1=11x_2,\ y_1=11y_2$ 。 (5)

從 (4)與(5)，我們得到

$$z_1^2+w_1^2=11(x_2^2+y_2^2)\text{。} \qquad (6)$$

由 (6) 得知

$$(z_1,w_1,x_2,y_2)\in S\text{ 且 }0<x_2+y_2+z_1+w_2<m\text{。} \qquad (7)$$

從(3)與(7)得到矛盾，因此，S 為空集合。

2. 若(1)中有一組解 (x,y,z,w)，我們令 $a=2x^2,b=3y^2,c=z^2,d=w^2$，則 (a,b,c,d) 滿足 (2) 式，此與 $S=\varnothing$ 矛盾！因此，我們得到此題的證明.

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽) 試題解答

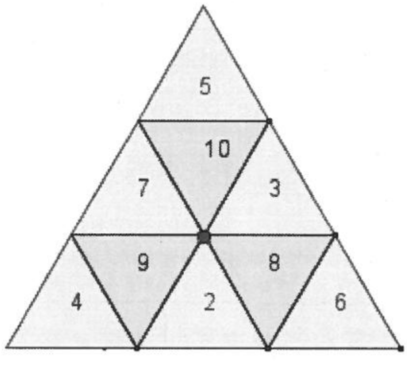
題目：

將邊長為 3 的正三角形分成九個全等的單位三角形。一開始每個單位三角形裡都填 0。每次操作可以選擇兩個相鄰的單位三角形（相鄰意為有共同邊）而將這兩個三角形內的數字都同時加 1 或同時減 1。已知經由若干次操作後，九個數恰好形成連續的正整數 $n,(n+1),\cdots,(n+8)$ ，試求所有可能的 n 值。

<table>
<tr><td rowspan="3">解
析</td><td>類　型</td><td colspan="3">☐ 代數(A)　☐ 數論(N)　☐ 幾何(G)　■ 組合(C)</td></tr>
<tr><td>試題出處</td><td colspan="3">■ 自編　☐ 改編於：</td></tr>
<tr><td>難易度</td><td>☐ 難　■ 中等　☐ 易</td><td>編 號</td><td>獨立研究二(3)</td></tr>
</table>

解答： $n=2$ 是唯一的可能。

從數字總和的奇偶性，得知不可能 $n=1$。當 $n=2$ 時，很容易寫出例子，如下：



假設 $n>2$ 辦得到。把各個單位三角形用 $1,2,3,\cdots,9$ 加以編號(左下角是 1, 右下角是 5)。將編號 2, 4, 7 的單位三角形塗色，並以 $S_{2,4,7}$ 表示在這 3 個單位三角形內的數字總和，$S_{1,3,5,6,8,9}$ 也是類似的定義。顯然，在操作過程中，總是有 $S_{2,4,7}=S_{1,3,5,6,8,9}$ ，因此，當數字 $n,(n+1),\cdots,(n+8)$ 填入各單位三角形時，此式子也成立。但是，

$$S_{2,4,7}\le(n+8)+(n+7)+(n+6)=3n+21，$$

而

$$S_{1,3,5,6,8,9}\ge n+(n+1)+\cdots+(n+5)=6n+15>3n+21\ge S_{2,4,7}。$$

因此，$S_{2,4,7}<S_{1,3,5,6,8,9}$ ，這是錯的。因此，答案僅有 $n=2$ 。

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽) 試題解答

題目：

設有 n 張牌，分別寫上 $1,2,3,\cdots,n$。對任意牌型 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，進行以下操作：若 a_n 為奇數，則將 a_n 置於最前面，即得新牌型 $a_n,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$；若 a_n 為偶數，則將 a_n 置於 a_1 與 a_2 之間，即得新牌型 $a_1,a_n,a_2,\cdots,a_{n-1}$。試證：當 a_1 為奇數時，經過連續操作多次後可回到原牌型，並求此最少的操作次數。

<table>
<tr><td rowspan="3">解析</td><td>類　型</td><td colspan="3">☐ 代數(A)　☐ 數論(N)　☐ 幾何(G)　■ 組合(C)</td></tr>
<tr><td>試題出處</td><td colspan="3">■ 自編　☐ 改編於：大陸競賽試題</td></tr>
<tr><td>難易度</td><td>☐ 難　☐ 中等　■ 易</td><td>編號</td><td>口試一</td></tr>
</table>

解答： 先將原牌型分組如下：

$$\underline{a_1},\ \underline{a_2,a_3,\cdots,a_{i_1}},\ \underline{a_{i_1+1},a_{i_1+2},\cdots,a_{i_2}},\cdots\cdots,\ \underline{a_{i_j+1},a_{i_j+2},\cdots,a_{i_{j+1}}},\ A\quad,$$

其中 $a_1,a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_{j+1}}$ 均為奇數，其他都是偶數，而末端 A 中的數均為偶數或無。

設 $|A|=r$，即 A 由 r 個偶數所組成。

(1) 若 $r\ge 1$，則經過連續 r 次操作後，牌型變成

$$\underline{a_1},\ \underline{A,a_2,a_3,\cdots,a_{i_1}},\ \underline{a_{i_1+1},a_{i_1+2},\cdots,a_{i_2}},\cdots\cdots,\ \underline{a_{i_j+1},a_{i_j+2},\cdots,a_{i_{j+1}}}\ 。$$

設此時最後一組 $\underline{a_{i_j+1},a_{i_j+2},\cdots,a_{i_{j+1}}}$ 有 k 張牌，即 $k=i_{j+1}-i_j$。則再經過 k 次操作後，牌型變成

$$a_{i_{j+1}},\ \underline{a_{i_j+1},a_{i_j+2},\cdots,a_{i_{j+1}-1},a_1},\ \underline{A,a_2,a_3,\cdots,a_{i_1}},\ \underline{a_{i_1+1},a_{i_1+2},\cdots,a_{i_2}},\cdots\cdots\ 。$$

依此下去，不難發現：原牌型經過 $n-1$ 次操作後，牌型變成

$$\underline{a_{i_1}},\ \underline{a_2,a_3,\cdots,a_{i_2}},\ \underline{a_{i_1+1},a_{i_1+2},\cdots,a_{i_3}},\cdots\cdots,\ \underline{a_{i_j+1},a_{i_j+2},\cdots,a_1},\ A\ 。$$

即牌型僅有奇數作一次輪換，而偶數位置不變。由此分析，可知：

當 n 為奇數時，原牌型有 $\dfrac{n+1}{2}$ 個奇數，故經過 $\dfrac{n+1}{2}$ 回的 $n-1$ 次操作後，所有奇數就會輪換到原位置。此時，最少的操作次數為 $\dfrac{n+1}{2}\times(n-1)=\dfrac{n^2-1}{2}$。當 n 為偶數時，原牌型有 $\dfrac{n}{2}$ 個奇數，故經過 $\dfrac{n}{2}$ 回的 $n-1$ 次操作後，所有奇數就會輪換到原位置。此時，最少的操作次數為 $\dfrac{n}{2}\times(n-1)=\dfrac{n^2-n}{2}$。

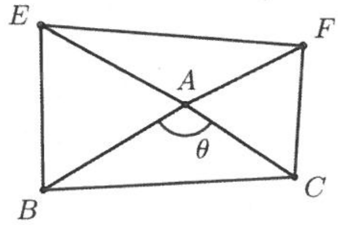
(2) 若 $r=0$，同情況(1)的分析，結果亦同。

110 學年度高中數學能力競賽 (決賽) 試題解答

題目：

如圖，在 ΔABC 的邊 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的外側分別作正三角形 ΔABE 及 ΔACF。已知 $\overline{AC}=1$ 且 $\overline{EF}=2$。

試求 ΔABC 面積的最大可能值。



解析	類　型	□ 代數(A)　□數論(N)　■ 幾何(G)　□ 組合(C)			
	試題出處	■ 自編　□ 改編於：			
	難易度	□ 難　□ 中等　■ 易	編 號	口試二	

解答：

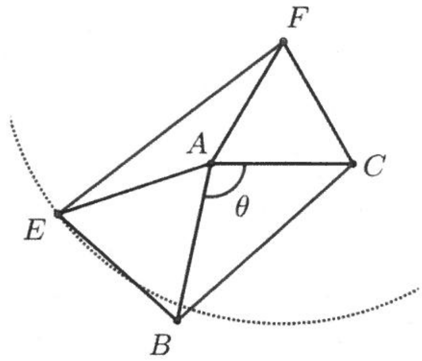
令 $\angle BAC=\theta$，$\overline{AB}=c$，則 $\angle EAF=240°-\theta$。

由餘弦定理：

$$\overline{EF}^2=\overline{AE}^2+\overline{AF}^2-2\overline{AE}\times\overline{AF}\cos(240°-\theta)，$$

所以，

$$\begin{aligned}3&=c^2-2c\cos(240°-\theta)\\&=c^2-2c(\cos 240°\cos\theta+\sin 240°\sin\theta)\\&=c^2+c\cos\theta+\sqrt{3}c\sin\theta.\end{aligned}$$



令 $x=c\cos\theta,\ y=c\sin\theta$，將上式改寫為

$$x^2+y^2+x+\sqrt{3}y=3.$$

配方得 $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2=4$。因此，

$$\Delta ABC\text{ 面積}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot c\cdot\sin\theta=\frac{y}{2}\le\frac{1}{2}(2-\frac{\sqrt{3}}{2})=1-\frac{\sqrt{3}}{4}\ \text{(此為最大值)}。$$

以下說明：任給 $0°<\theta<180°$，都有滿足條件的 ΔABC：

如圖所示，固定平面上邊長為 1 的正三角形 ΔACF。考慮以 F 為中心作半徑為 2 的圓，設 E 為圓上的動點，且從射線 $\overrightarrow{AC}$ 逆時針旋轉至射線 $\overrightarrow{AE}$ 的角度是在 $60°$ 至 $180°$ 的範圍，在 $\overleftrightarrow{AE}$ 下側作正三角形 ΔABE；此時，點 B 與點 F 在 $\overleftrightarrow{AC}$ 的相反兩側，又這兩個正三角都在 ΔABC 的外部，所以，θ 可任意在 $0°$ 至 $180°$ 間變化。

110 學年度北一區（花蓮高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）試題

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 46 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 已知 a,b 為正整數，a^2+b^2 除以 $a+b$ 的商為 q，餘數為 r，求所有滿足 $q^2+r=2021$ 的數對 (a,b)。

(12 分)

問題二： 設 a,b,c,A,B,C 為實數，且 $a\neq 0, A\neq 0$。假設對所有的實數 x，不等式

$$\left|ax^2+bx+c\right|\leq\left|Ax^2+Bx+C\right|$$

恆成立，試証明

$$\left|b^2-4ac\right|\leq\left|B^2-4AC\right|。$$

(12 分)

《背面尚有試題》

問題三： 已知$|z|=1$（z 為複數），求$|z^3-z+2|$的最大值。

(10 分)

問題四： (1)設 $p(x)$ 為一個整係數多項式。若 m 為 $p(x)$ 的一個整數根，則 $p(x)+2$（或 $p(x)-2$）的整數根只有可能為 $m\pm1$ 或 $m\pm2$。 (4 分)

(2)設 $p(x)$ 為一個 n 次的整係數多項式。試証明 $p(x)\big(p(x)+2\big)$ 最多只有 $n+2$ 個整數根。 (8 分)

《試題結束》

110學年度北一區（花蓮高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（二）試題

編號：______________（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共八題填充題，每題 3 分，滿分為 24 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案欄內。

1. 設 A 為坐標平面上滿足 $|x|+|y|\le 1$ 的區域，則定義在 A 上的函數 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 之最大值為____(一)____。

2. 對每一對實數 x,y，函數 f 都滿足 $f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1$。若 $f(1)=1$，則滿足 $f(n)=n$ 的整數 n 有____(二)____個。

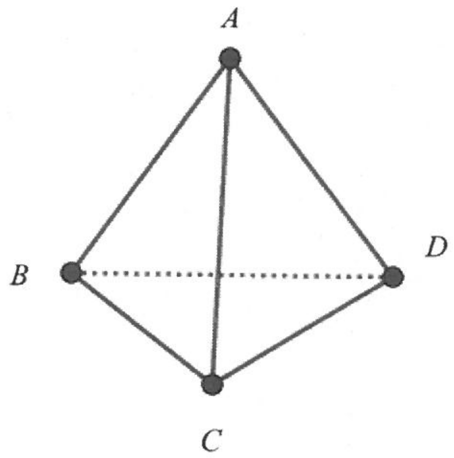
3. 若三角形的三邊互不相等，且兩高長分別為 4,12，又第三高長 h 也為整數，則 h 的最大值為____(三)____。

4. 擲一枚不均勻的硬幣，假設正面朝上的機率是 $\frac{2}{3}$；如果擲 30 次，出現正面的總次數是偶數的機率為____(四)____。

《背面尚有試題》

5. 設 x, y, z 為三個正實數，其和為 1，且三數中的任何一個數不超過另一個數的兩倍；則 xyz 的最小值為____(五)____。

6. 設動點 P 每一次自正四面體 $ABCD$ 的一個頂點移至另一頂點的機率都是 $\frac{1}{3}$。現在 P 自 A 出發，移動 4 次又回到 A 且恰好經過一次 B 的機率為____(六)____。



7. 方程式 $\frac{xy}{x+y}=11979$ 的正整數解 (x, y) 有____(七)____個。

8. 若 m, n 為整數且 $mn \geq 0$，則滿足 $m^3+n^3+93mn=31^3$ 的整數數對 (m, n) 有____(八)____組。

《試題結束》

110 學年度北一區（花蓮高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科口試試題

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

1. 本口試卷共 2 題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在空白紙上作答，口試時請攜帶作答紙應試，口試答辯時間 15 分鐘，並繳回作答紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的精確度。

【口試一】

對於正整數 a，我們稱 $\frac{a(a+1)}{2}$ 為一個三角數。若 n 為一正整數試証明 n 為兩個三角數之和若且唯若 $4n+1$ 為兩個整數平方和。

【口試二】

設 $f(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 為一個實係數五次多項式。如果 $f(x)$ 的五個根都在單位圓上，請說明這五個根的倒數和等於五個根的和 $-a$。

《試題結束》

110學年度台灣省北二區(新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(一)試題

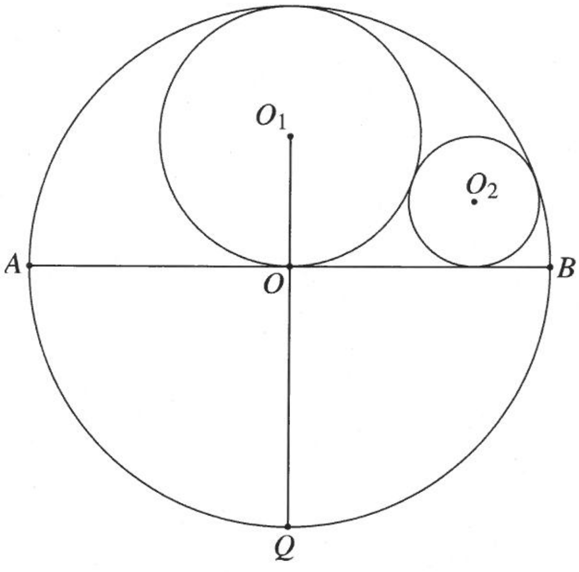
編號：______________________(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為49分。
2. 考試時間：2小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 設$\overline{AB}$為圓O的直徑。由AB截出的半圓內有兩個小圓O_1,O_2分別和直線AB相切、也同時內切於圓O，且圓O_1與圓O_2相切，如圖所示。已知O_1O與AB垂直，射線O_1O與圓O交於點Q。

1. 設圓O的半徑為r，試求圓O_2的半徑。
2. 試證Q在圓O_1,O_2的內公切線上。



(16分)

問題二： 令 $f(x)$ 為一個不可約的 5 次有理係數多項式，且 $g(x)=f(x^2+2021)$。假設有理係數多項式 $H(x)$ 為 $g(x)$ 的一個因式，且 $H(x)$ 的次數小於 $g(x)$ 的次數。

1. 試證明 $H(-x)$ 亦為 $g(x)$ 的因式。
2. 試證明 $H(x)$ 和 $H(-x)$ 互質。

(16 分)

問題三： 設正整數 n 的正因數個數為 a_n，且 n 的所有正因數之乘積為 b_n。

1. 試說明 $b_n^2=n^{a_n}$ 對每一正整數 $n\geqslant 2$ 都成立。
2. 定義函數

$$f(n)=\frac{\sqrt{a_n^3}}{\sqrt[a_n]{b_n}}\qquad (n=2,3,4,\cdots)\text{，}$$

試求函數 f 的最大值。

(17 分)

110學年度台灣省北二區(新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(二)試題

編號：______________________(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案依序填寫在答案欄內。

問題：

1. 已知

$$\log_3\log_4\log_2 x=\log_4\log_2\log_3 y=\log_2\log_3\log_4 z=0,$$

則 $2x+3y+4z$ 的值為 ___(一)___ 。

2. 在三角形 ABC 的 AB 邊上有一點 D 滿足 $\overline{AD}:\overline{DB}=2:3$，且 $\angle BCD=2\angle DCA$。由點 A 向直線 CD 引垂線，設垂足為 E。則 $\overline{CE}:\overline{BC}=$ ___(二)___ 。

3. 設實數 x,y 滿足

$$\begin{cases}2y-5\leqslant 0\\ 11x-8y-13\leqslant 0\\ 11x+4y-21\geqslant 0,\end{cases}$$

則 $\dfrac{y}{x}$ 的範圍為 ___(三)___ 。

(背面尚有試題)

4. 設 $[x]$ 表示不大於實數 x 的最大整數，則滿足此方程式

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]=69$$

的所有正整數 n 之和為 ____(四)____。

5. 甲乙兩人舉行五戰三勝的比賽(任一人先勝三局比賽就結束)。每一局比賽必有勝負，其中甲勝的機率為2/3，乙勝的機率為1/3。問比賽結束時，乙獲勝場次的期望值為 ____(五)____。

6. 令 $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$。已知 $N=\dfrac{\alpha^9-100}{\alpha^3-4}$ 為正整數，則 N 之值為 ____(六)____。

7. 對正整數 n 來說，如果 $(7x+1)^n$ 展開集項整理後至少有兩項的係數相同，則這樣的 n 稱為奇妙的 n。最小的30個奇妙的 n 的總和是 ____(七)____。

(試題結束)

110學年度台灣省北二區(新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題

編號：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿(學生自填)

注意事項：

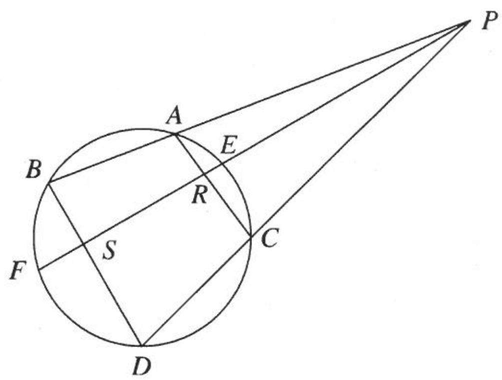
1. 本口試卷共兩題，思考時間15分鐘；參賽者可先在本試卷上作答，口試時請攜帶本試卷應試，口試答辯時間15分鐘，並繳回本試卷。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

問題：

1. 試問由1,3,6,7,8排成數字都相異的四位數中，可以表成兩個整數的平方差之四位數共有多少個？

2. 過圓外一點P，作圓的三條割線PAB, PCD, PEF，分別交圓於點A、B、C、D、E、F。$\overline{AC}$和$\overline{BD}$分別交$\overline{EF}$於點R、S，如圖所示。證明：

$$\frac{\overline{ER}}{\overline{PR}}\cdot\frac{\overline{PS}}{\overline{SF}}\cdot\frac{\overline{PF}}{\overline{PE}}=1$$



110 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（一）　　編號：______

（時間二小時）

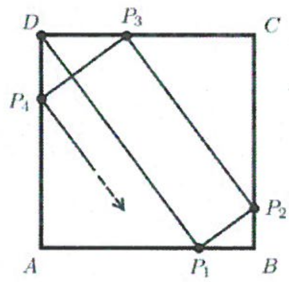
注意事項：

1. 本試卷共五題**計算證明題**，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、如圖，有一個單位正方形 $ABCD$，一個質點 P 最初位在 D 處，然後開始在正方形內部移動，移動的規則如下：首先直線行進到 P_1，其中 $\overline{AP_1}:\overline{P_1B}=3:1$，在每次碰到正方形的邊時，都逆時針轉 90 度再直線前行到下一個邊，於是依序得到 $P_2, P_3, P_4, \cdots$。

(9 分)

試找出最小的正整數 N，使得對所有 $n\geq N$, $\overline{P_1P_n}>\dfrac{1}{4}$。

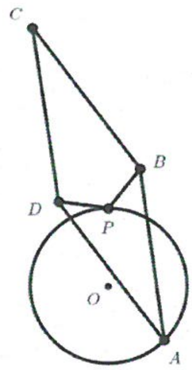


二、如圖，一個平面上的機械裝置，設計原理如下：

(9 分)　有一個半徑為 r 的圓，圓心為 O，圓 O 上有一個固定點 P，另有一個在圓上的動點 A。

考慮一個活動的菱形 $ABCD$，菱形邊長為 L，而這個菱形的 B, D 兩點是由 $\overline{PB}=\overline{PD}=l$ 決定，其中 l 也是一個定值，且滿足 $0<L-l<2r$。

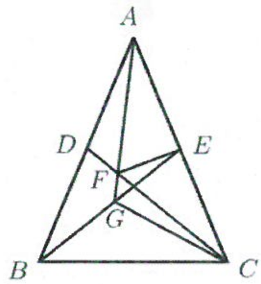
試證：當 A 在圓 O 上移動的時候，C 點的軌跡是直線的一部分。



三、如圖，在 ΔABC 中, $\overline{AB}=\overline{AC}$, D, E 分別是 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 上的中點。通過 E 作一條垂直於 $\overline{AC}$ 的直線交 $\overline{CD}$ 於 F, 而 $\overline{AF}$ 的延長線交 $\overline{BE}$ 於 G, 最後連接 $\overline{CG}$。

(10 分)

試證: $\angle CBE=\angle GCE$。



四、設數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ a_{n+1}=a_n-a_{n-1}+\dfrac{{a_n}^2}{a_{n-2}}, n\geq 3$。

(10 分)

證明：$\{a_n\}$ 是整數數列。

五、設 a, b 為大於 2 的兩相異正整數，若存在一個正整數數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$（其中 k 為正整數）使得 $a_0=a, a_{k+1}=b$，而且對所有的 $i=0,1,\ldots,k$，$\dfrac{a_ia_{i+1}}{a_i+a_{i+1}}$ 都是整數，我們稱 a, b **可被長度為 k 的正整數數列連結**。

(11 分)

試證明：若 p 為大於 2 的質數，則 p 與 $p+1$ 無法被長度為 1 的正整數數列連結，但可被長度為 2 的唯一一個正整數數列連結。

110 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（二）　　編號：_____

（時間一小時）

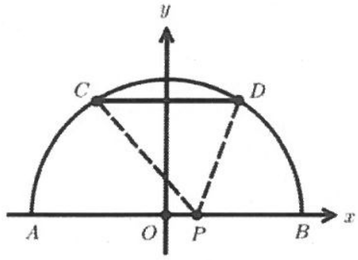
注意事項：

1. 本試卷共七題**填充題**，每題 3 分，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、設 a 為實數，若坐標平面上滿足 $|x-y|+|x+y|\le 2$ 與 $|x-2y|+|2x+y-5|\le a$ 的區域面積為1，求 a 值。

二、試求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{2021}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)^2}+\sqrt{n^2(n+2)}}$ 的值。

三、一個半徑為1的半圓 O，其中 $\overline{AB}$ 為直徑，在 $\overline{AB}$ 上有一點 P 使得 $\overline{OP}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$，若有一弦 $\overline{CD}$ 平行於 $\overline{AB}$ 且 $\angle CPD=54^\circ$，問 $\overline{CP}^2+\overline{DP}^2$ 的值。



四、某間餐廳後場有 A,B,C,D 四位廚師，四位廚師出餐數量的比例分別為 $10\%, 20\%, 30\%, 40\%$，依過往經驗四位廚師出餐錯誤的比例個別為 $4\%, 3\%, 2\%, 1\%$；現在顧客拿到一份製作錯誤的餐點，試求此份餐點是由 B 廚師製作的機率。

五、請問數列 $\left[\dfrac{1^2}{2021}\right],\left[\dfrac{2^2}{2021}\right],\left[\dfrac{3^2}{2021}\right],\cdots,\left[\dfrac{2021^2}{2021}\right]$ 中共有幾個相異整數?

註：$[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數。

六、設 $P(x)$ 為實係數多項式，其次數為2019次，且對於 $k=1,2,\ldots,2019$，均有 $(k+1)P(k+1)-kP(k)=1$，求 $P(2021)$。

七、箱中有2根香蕉、3顆芭樂、4顆蓮霧，每次隨機抽取一個水果食用，試求芭樂為三種水果中最先被吃完的機率。

110 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

第四區(台南一中)數學科筆試(一)試題

編號：___________

注意事項：

(1). 考試時間：2 小時。
(2). 本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。
(3). 將計算及證明過程寫在答案卷上。
(4). 不可使用電算器。
(5). 試題及計算紙必須連同答案卷交回。

一、設正整數a,b,c,d滿足$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$且$\mathrm{a}+\mathrm{c}=10$，試求$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$的最大值。

二、已知a,b,c,d為正數，且滿足$abcd=1$，試證：

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d}\geq 4$$

三、某網球隊有偶數n個選手，進行了兩輪的單循環比賽。在每輪的比賽中，每兩人都比一場，比賽結果若為和局，則兩人各得1分；若有分出勝負，則贏者得2分，敗者得0分。如果在第二輪比賽中，每個選手的得分之和都比第一輪比賽變化了不少於n分，則每個選手都剛好變化多少分？請證明你的答案。

四、對自然數n，令$a_n=\left[\frac{7^n}{8}\right]$，其中$[x]$表示不超過$x$的最大整數，若$b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，試求$b_{2022}$除以50的餘數。

110 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

第四區(台南一中)數學科筆試(二)試題

編號：__________

注意事項：

(1). 考試時間：1 小時。
(2). 本試卷共六題填充題，前三題每題 3 分，後三題每題 4 分，滿分 21 分。
(3). 將演算結果依序寫在**答案卷**上。
(4). 不可使用電算器。
(5). 試題及計算紙必須連同答案卷交回。

一、已知$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$，如果$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}=\frac{7}{3}$，試求$\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}=$____（一）____。

二、試求$\log\left(\sqrt[3]{2}-1\right)+\log\left(\sqrt{5+4\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}}\right)=$____（二）____。

三、已知a,b是正實數，若方程式$x^2+2ax+16b=0$和$x^2+2bx+2a=0$均有實數根，試求a^2+b^2的最小值為____（三）____。

四、設a,b,c皆為整數，試求滿足方程組$\begin{cases}ab+5=c\\ bc+1=a\\ ca+b=1\end{cases}$的所有解$(a,b,c)=$____（四）____。

五、設$\frac{x}{x^2+x+1}=\lambda$，其中$\lambda$是小於$\frac{1}{2}$的實數，試以$\lambda$表示$\frac{x^4}{x^8-x^4+1}$之值為____（五）____。

六、已知ΔABC中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，且$\angle B$的角平分線交$\overline{AC}$於$D$點，且$\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{AD}$，試求$\angle A=$____（六）____。

110 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

第四區(台南一中)數學科口試(一)試題

問題：已知一函數f之定義域為所有整數，且滿足下列條件：

(1). $f(0) \neq 0$
(2). $f(1) = 3$
(3). 對任意整數a, b，有$f(a)f(b) = f(a+b) + f(a-b)$
試求$f(7)$和$f(9)$之值。

110 學年度普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

第四區(台南一中)數學科口試(二)試題

問題：試討論方程式$x^6-x^3-x^2-x+5=0$之實數解個數。

110 學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第 5 區(屏東高中)　筆試(一)　編號：___________

注意事項：

(1) 時間分配: 2 小時。

(2) 本試卷共4題，滿分49分。第一題12分，第二題12分，第三題12分，第四題13分。

(3) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4) 不可使用電算器。

(5) 試題與答案一同繳回。

一、令多項式$p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$且$d=\frac{c^2}{a^2}$，$a\neq 0$。

(1) 試求b (以a, c表示)的值使得$p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$為二階多項式的平方。(即存在m與n使得$p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+mx+n)^2$)

(2) 試求$x^4+2x^3-20x^2+6x+9$的根。

二、試證明：$\frac{1}{2021}<\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2019}{2020}<\frac{1}{44}$。

三、設a與b皆為正實數，且$a+b=s$。

(1) 試求出ab的最大值(以s表示)。

(2) 若$s=2$，試求出$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$的最小值。

(3) 若$s=2\sqrt{6}$，試求出$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$的最小值。

四、已知 P 為三角形 $\triangle ABC$ 內部之一點，且 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\alpha$，試證明：$\csc^2\alpha=\csc^2A+\csc^2B+\csc^2C$。

(定義：$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$)

110學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第5區(屏東高中)　筆試(二)　編號：__________

注意事項：

(6) 時間分配: 1 小時。

(7) 本試卷共4題，滿分21分。第一題5分，第二題5分，第三題5分，第四題6分。

(8) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(9) 不可使用電算器。

(10)試題與答案一同繳回。

一、設x、y與z皆為質數，試求出所有滿足下列方程式的序對(x,y,z)：
$x^y - z = 1$，$z \le 2021$。

二、給定30個互不相等的正整數，這些數字均小於或等於155。試證明這些數字兩兩相減(大數減小數)所得的差之中，至少有四個相等。

三、試求出下列級數之值：

$$\sum_{n=1}^{2021} (-1)^n \frac{n^2+n+1}{n!}$$

四、已知m為實數，考慮圓系C: $x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$。

(1) 上列所表實圓最大面積 = ________，此時 m = ________。

(2) 上列所表圓截x軸所得最大弦長 = ________。

110學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第5區(屏東高中)

口試(一)

設$P(x)$是一個實數係數多項式，且

$W(x)=(x+1)P(x-1)-(x-1)P(x)$是一個常數多項式。

試求出所有滿足條件的多項式 $P(x)$。

110學年度普通型高級中等學校數學科能力競賽試題

第5區(屏東高中)

口試(二)

已知 $\triangle ABC$ 為直角三角形，其中 $\overline{AB}=13$、$\overline{AC}=5$、$\overline{BC}=12$。

一個質點 P 沿著$\overrightarrow{CB}$ 作直線運動。

設 $\overline{PB}=e$、$\overline{PA}=d$，試問當 e 值愈來愈大時，$(d-e)$ 值的變化為何？

110 學年度臺北市（陽明高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（一）試題

編號：_______________（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷繳回。
4. 將作答過程填寫在答案卷內。

【問題一】 設數列 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8$ 的每一項都是正數，且同時滿足以下八個等式：

$$a_1=\frac{1}{a_8}+\frac{1}{a_2} \qquad a_2=a_1+a_3$$

$$a_3=\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_4} \qquad a_4=a_3+a_5$$

$$a_5=\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_6} \qquad a_6=a_5+a_7$$

$$a_7=\frac{1}{a_6}+\frac{1}{a_8} \qquad a_8=a_7+a_1$$

(1) 試比較 a_2,a_4,a_6,a_8 四數的大小關係。 (6 分)

(2) 試找出所有可能的數列 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8$。 (6 分)

【問題二】 設正整數 m 及質數 p 滿足 $16p^2(51-2m)=m^2(51+2m)$。

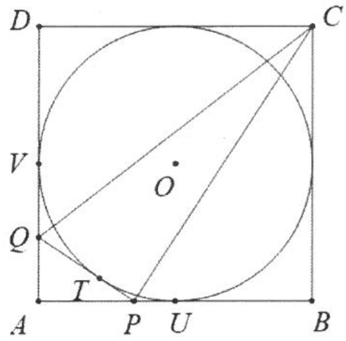
(1) 試說明 m 必為 4 的倍數。 (4 分)

(2) 試找出所有可能的數對 (m,p)。 (8 分)

<背面尚有試題>

【問題三】如圖，$ABCD$ 是邊長為 6 的正方形，其內切圓 O 分別切 $\overline{AB}$、$\overline{AD}$ 於 U,V 兩點，且 $\overline{PQ}$ 與圓 O 相切，其中點 P 在 $\overline{AU}$ 上，點 Q 在 $\overline{AV}$ 上。

試證：ΔCPQ 的面積為定值，並求此定值。 (12 分)



【問題四】設正整數 $n \geq k \geq 3$。對 $X=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 中恰含 k 個元素的子集 A，令 $f(A)$ 表示 A 中 3 個連續整數組 $(i,i+1,i+2)$ 的組數；例如：

對 $n=9$ 及 $k=7$，在 $A=\{1,2,3,5,6,7,8\}$ 中，出現 3 個連續整數的組數恰有 3 組：$(1,2,3),(5,6,7),(6,7,8)$，此時 $f(A)=3$。

設 X 中所有 k 個元素的子集 A 之 $f(A)$ 值的總和以 $S_n(k)$ 表示。

(1) 對 $n=9$ 及 $k=4$，試求 $S_9(4)$ 之值。 (5 分)

(2) 對任意正整數 $n \geq k \geq 3$，試求 $S_n(k)$ 的一般式。 (8 分)

<試題結束>

110 學年度臺北市（陽明高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（二）試題

編號：________________（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷繳回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

1. 設 $x=\sin\theta+\cos\theta$。已知 $\sin^6\theta+\cos^6\theta$ 可以表成 x 的多項式 $f(x)$，則 $f(x)$ 除以 x^2 的餘式為 ＿（一）＿。

2. 設 a,b 均為正整數且 $b\le 10$。若方程式
$$\left(\log_2(x^2-2ax+b)\right)^2-\log_2(x^2-2ax+b)^3+2=0$$
恰有兩個相異實根及兩個虛根，則 $a\times b$ 的最大可能值為 ＿（二）＿。

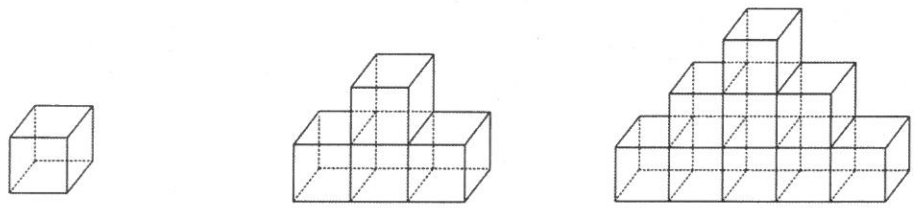
3. 若實數 x,y 滿足 $xy=2$，則分式 $\dfrac{\left((x+y)^2-6\right)\left((x-y)^2+8\right)}{x^2+y^2-4}$ 的最小值為 ＿（三）＿。

4. 在所有的正整數中，將含有數字 3 或 6 或 9 的數全部刪除後，剩下來的數由小而大排成一列，則第 2021 個數為 ＿（四）＿。

〈背面尚有試題〉

5. 若實數 a,b,c,d 滿足 $a^2+b^2+c^2=1$，則 $(a-d-11)^2+\left(b-2d\right)^2+(c-3d-1)^2$ 的最小值為 ＿（五）＿。

6. 如下圖，第一個圖是由12根火柴棒組成的一個正立方體，第二個圖是在第一個圖的下方增加3個正立方體；第三個圖是在第二個圖的下方增加5個正立方體，依此類推，其中銜接處的火柴棒都是共用的，例如：第二個圖是由36根火柴棒所組成。若 n 為正整數，則第 n 個圖是由 ＿（六）＿ 根火柴棒所組成。(以 n 的數學式表示)



圖一　　圖二　　圖三

7. 若 $x>0$ 且滿足 $\sqrt[3]{3x+14}-\sqrt[3]{3x-14}=1$，則 $x=$ ＿（七）＿。

110 學年度臺北市（陽明高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題

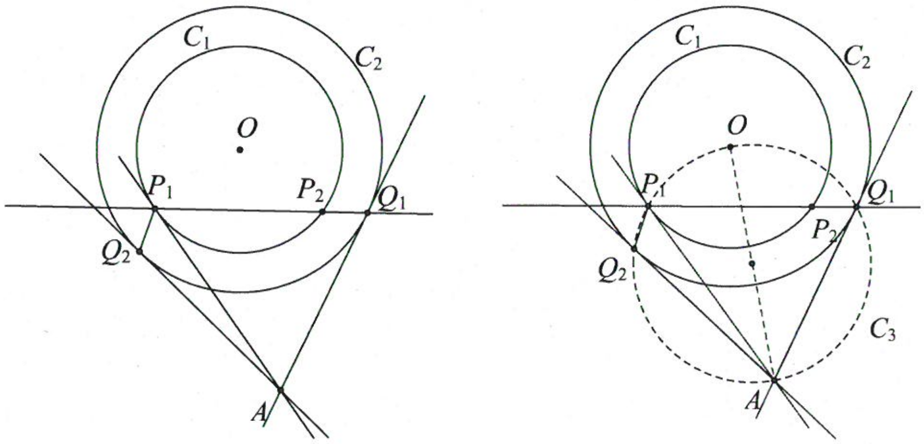
注意事項：

1. 本口試卷共兩大題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在本試卷作答，口試時請攜帶本試卷應試，口試答辯時間為 15 分鐘，答辯完畢後繳回本試卷。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需太專注於計算的精確度。

【問題一】 設 C_1, C_2 為兩個同心圓，P_1, P_2 為 C_1 上的兩點，$\overline{P_1P_2}$ 不是 C_1 的直徑；射線 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 交 C_2 於點 Q_1，過點 Q_1 作圓 C_2 的切線與過點 P_1 作圓 C_1 的切線交於點 A，再過點 A 作圓 C_2 的另一切線 $\overleftrightarrow{AQ_2}$ 切圓 C_2 於點 Q_2。

(1) 試說明 P_1, Q_1, A, Q_2 四點共圓。

(2) 若 $\angle Q_1P_1Q_2 = 110°$，試求 $\angle Q_1P_1A$ 的度數。



提示： 考慮以 $\overline{OA}$ 為直徑的圓。

【問題二】 設函數 $g(x)=x-3\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{4^n}\right]$，其中 $\left[\frac{x}{4^n}\right]$ 表示不大於 $\frac{x}{4^n}$ 的最大整數。試求滿足 $g(x)=g(2021)$ 且 $x>2021$ 的最小正整數 x。

提示： 考慮正整數 x 的四進位表示法。

110 學年度新北市(新店高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（一）試題

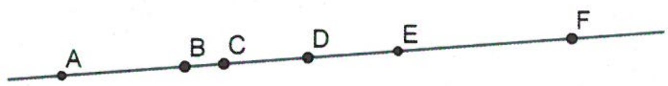
編號：____________（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 一直線上相異 6 點 A、B、C、D、E、F(如圖)，其中 B 點為 A、D 兩點之中點，E 點為 C、F 兩點之中點。

已知 $\overline{BC}\cdot\overline{BF}=\overline{AB}^2$，試證 $\overline{AE}\cdot\overline{DE}=\overline{EF}^2$。



問題二： 給定一遞減實數列 $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n>0$，

滿足 $a_1+a_2+\cdots+a_n<2n$，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2>n^2$。

證明：$a_1+a_2>n$。

問題三： 已知數列 $a_1=1$, 且 $3a_{n+1}=5a_n+\sqrt{9+16a_n^2}$

(a) 求 a_n 的一般式。

(b) 試證對於所有的正整數 n， 滿足 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}<\frac{3}{2}$。

<試題結束>

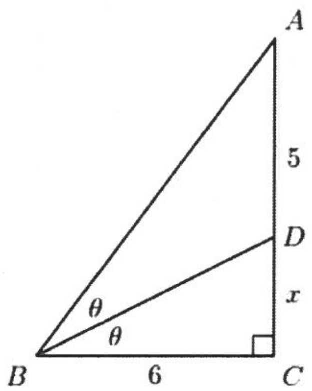
110 學年度新北市(新店高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（二）試題

編號：＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫於對應題號欄內。

問題一：如圖，在三角形 ΔABC 中， D 為 AC 邊上的一點。已知 $\overline{BC}=6$，$\overline{AD}=5$，$\overline{CD}=x$，$\angle ABD=\angle DBC$，以及$\angle BCD$ 為直角。則 x 之值為 ＿（一）＿。



問題二：已知多項式 $f(x)=x^4-5x^3+3x^2+19x-30$ 有一個複數根 $2+i$，若實數 a 滿足 $f(a)<0$，則 a 的範圍為 ＿（二）＿。

問題三：令 $f(n)$ 為正整數 n 的各位數和，如 $f(12345)=15$、$f(f(12345))=6$。試求 $f(f(f(123456789^{2021})))=$ ＿（三）＿。

<背面尚有試題>

問題四：大圓桌旁有 18 張相異的椅子，圍成正 18 邊形放置，現有 5 人入坐，因為疫情關係，必需彼此不相鄰，且任意 1/3 圓都至少有 1 位置坐人的方法有 ___(四)___ 種。

問題五：求 $\sum_{k=0}^{n-1} cos^2(\alpha+\frac{2\pi}{n}k)$ = ___(五)___ 。

問題六：已知複數數列 $\ll z_n \gg$ 滿足 $z_1=1$，$z_{n+1}=\overline{z_n}+1+ni$，$n=1,2,3,\cdots$，其中 $i=\sqrt{-1}$， $\overline{z_n}$ 為 z_n 的共軛複數。

試求 $z_{2021}=$ ___(六)___ 。

問題七：三角形 ΔABC 滿足 $\cos A+\sin A-\frac{2}{\cos B+\sin B}=0$，

試求 $\sin A=$ ___(七)___ 。

<試題結束>

110 學年度新北市(新店高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科口試試題

編號：＿＿＿＿＿＿＿（學生自填）

注意事項：

1. 本口試卷共兩題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在計算紙上作答，口試答辯時間 15 分鐘，並繳回計算紙。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

問題一：已知 $a_1, a_2, \cdots, a_{110}$ 均為正實數且滿足

$$\frac{1}{2+a_1}+\frac{1}{2+a_2}+\cdots+\frac{1}{2+a_{110}}=\frac{1}{2}$$

試求 $a_1 a_2 \cdots a_{110}$ 的最小值。

問題二：定義數列 $a_n = 2.1 \times 3.05^n - 0.94 \times 1.42^n$，求 $\frac{a_{2021}}{a_{2020}} = ?$

(無條件捨去至小數點後第四位，$\log 2 = 0.301, \log 3 = 0.477, \log 7 = 0.845$)計算機只當輔助使用，還需要詳細說明原因。

<試題結束>

110學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（一）

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題**計算證明題**，滿分為 49 分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、求出所有大於 1 的正整數 n 使得 $(n-1)!$ 為 n 的倍數。
(9 分)

二、設 $a,b,c,$ 為三個相異實數。已知方程式 $x^2+ax+1=0$ 和 $x^2+bx+c=0$ 恰有一個相同實根，且方程式 $x^2+x+a=0$ 和 $x^2+cx+b=0$ 也恰有一個相同實根，求 $a+b+c$ 的值。
(10 分)

三、假設小明每天記錄天氣狀況，若沒下雨則記為 S，下雨則記為 R。如果某幾天紀錄為 $SS\underline{R}SSS\underline{RRR}SS\underline{R}SSS$，則連續下雨天的次數為3，此時我們記為 $r=3$。請注意，即使兩天沒下雨之間只夾一天下雨，那個下雨天也視為 1 次連續下雨。若二月份中，有16天下雨且12天沒下雨，求 $r=5$ 時所有可能的排列個數。
(10 分)

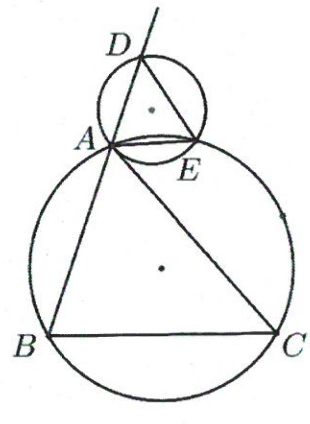
四、令 $x_1=2$，$x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+1}{2x_n-1}$，$n\geq 1.$
(10 分)

(a) 證明：對所有正整數 n，$x_n>\alpha$ 皆成立，其中 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.$

(b) 證明：$|x_5-\alpha|\leq 10^{-12}.$

五、在 ΔABC 的邊 $\overline{AC}$ 的外側作一個圓 K，它過頂點 A 且與 $\overline{AC}$ 切於點 A。圓 K 與 ΔABC 的外接圓再交於點 E 且與 $\overline{AB}$ 的延長線交於點 D.
(10 分)

證明：若 $\overline{BD}=\overline{AC}$ 則 $\overline{DE}=\overline{AE}.$



110學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（二）

（時間一小時）

注意事項：

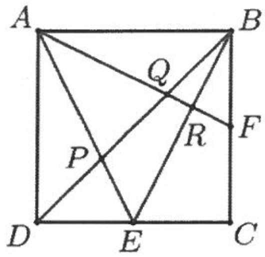
1. 本試卷共七題**填充題**，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、設$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，求$\sin^3\theta\cos\theta$的最大值。

二、某國家的紙鈔面額有 1 元、5 元、10 元和 50 元等 4 種，將它們湊成 100 元的方式有幾種？

三、若正整數n滿足 $10^{10}\le C_0^n+2C_1^n+2^2C_2^n+\cdots+2^nC_n^n\le 3\cdot 10^{10}$，則$n$之值為何？（$\log 3=0.4771$）

四、設$ABCD$為單位正方形，E,F分別為$\overline{CD},\overline{BC}$的中點，$\overline{AE}$交對角線$\overline{BD}$於$P$，$\overline{AF}$分別交$\overline{BD},\overline{BE}$於點$Q,R$，試求四邊形$PQRE$的面積。



五、設x為非負實數，若非負整數n滿足$n-\dfrac{1}{2}\le x<n+\dfrac{1}{2}$，則定義$r(x)=n$，此即實數$x$四捨五入到個位數之後的結果。求滿足方程式$r(x^2)-2r(x)-3=0$的所有非負實數$x$.

六、化簡 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_k^n}{(k+2)(k+3)(k+4)}.$

七、設n為正整數，令$E(n)$表示$(x+y)^n$的展開式中偶係數的個數，例如：因為$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$，所以$E(2)=1.$
求$E(1)+E(2)+\cdots+E(31)$的和。

110 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄）　　筆試（一）

一、設 n 為大於16 之整數，試證 $n^2-31n+241$不可能為完全平方數。

二、將正整數 $1,2,\cdots,10$ 任意排成一列，證明至少可以從中選取出從小到大或從大到小的四個數。

三、已知x,y均為大於 2 的實數，求滿足

$$x+y+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{y-2}-2=2(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2})$$

的x,y之值。

四、給定一個銳角三角形ABC，由三角形的三頂點分別畫出到對邊的高，設其中最長的為h，試證$2\sqrt{3}h$大於等於三角形的周長。

110 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄區）　　筆試（二）

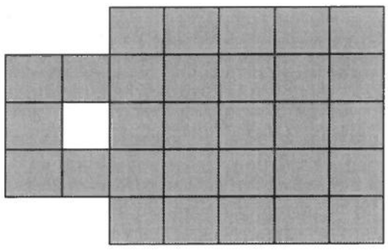
一、設 m 與 n 為兩互質的正整數，已知$30m+n$ 與$30n+m$ 兩數不互質，試求出他們所有的公因數。

二、設x,y為實數，且為下式的解。求$x+y$的值為何?

$$\begin{cases}(x-2)^3+2021(x-2)=2\\(y-2)^3+2021(y-2)=-2\end{cases}。$$

三、在下右圖的區域中，我們只允許往上下左右相鄰的格子移動。請問是否存在每一個格子恰好經過一次而且轉彎的次數少於 11 次的路徑？

（須說明或證明妳(你)的答案）



四、設x是實數，函數$f(x)$滿足$f(x)-f(x-1)=x^3$。已知$f(10)=30$，求$f(200)$除以 10000 之餘數為何?