

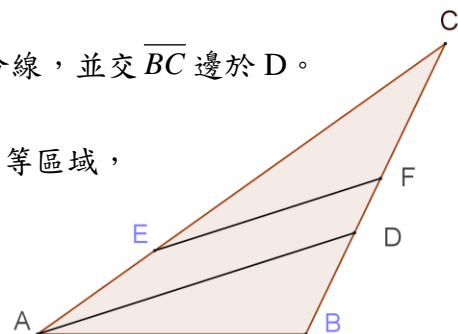
國立彰化高級中學 109 學年度資優班甄選—複選實作評量【數學科】試題卷

注意事項：

1. 本試題卷有 2 頁。題目有 11 題填充題與 4 題計算證明題，給分方式依據題目說明，不得使用計算機。
2. 請將答案寫在答案卷上，並將試題卷、答案卷、計算紙交回。
3. 所有圖形僅作參考，不代表實際大小。
4. 答案需化至最簡(最簡根式、最簡分數)，才予以計分。
5. 「計算證明題」需在計算欄內寫上計算過程(勿寫錯格)，不需抄題，只有答案沒有計算過程不予計分。

一、填充題(每題 5 分)

1. 化簡： $\sqrt{9+\sqrt{32}+\sqrt{48}+\sqrt{24}}-\sqrt{6-\sqrt{24}+\sqrt{12}-\sqrt{8}}=$ _____。
2. 一個木箱漂浮在水上，從河的上游往下游漂去，當木箱漂流到河的中央，此時在河的上游有一小船甲船、在河的下游有一小船乙船，兩船各向木箱滑行，如果水流速度為每分鐘 4 公尺、甲、乙兩船滑行速度皆為每分鐘 25 公尺，請問哪一艘船先遇到木箱_____。(註明：兩船皆在還沒走完整條河流前遇到木箱)
3. 有一個三位數，各位數字和是 18，如果個位數字與百位數字交換後，比原數大 495，如果十位數字與百位數字交換後，比原數大 630，求此數_____。
4. 如右圖(圖形僅作參考，不代表實際大小)， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=7$ ， \overline{AD} 為 $\angle BAC$ 的角平分線，並交 \overline{BC} 邊於 D。
如果 E、F 分別為 \overline{AC} 、 \overline{BC} 邊上的點， $\overline{EF} \parallel \overline{AD}$ 、且 \overline{EF} 與 \overline{AD} 將 $\triangle ABC$ 分成三面積相等區域，
 \overline{BC} 長度為整數值，試求 \overline{BC} 長度可能值有幾種_____。



5. 設 a, b, c, d 四實數依序成等差，而且實數 x, y, z, u 滿足

$$\begin{cases} a+b+c+d=40 \\ x+y+z+u=10 \\ ax+by+cz+du=170 \end{cases}, \text{ 試求 } au+bz+cy+dx \text{ 之值 } \underline{\hspace{2cm}} .$$

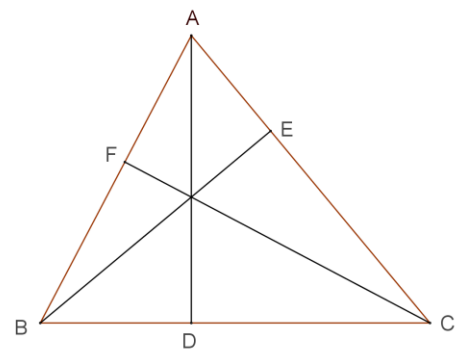
6. 將一個 2 位數碼(00~99)平方後，取百位與十位數字形成一個新的 2 位數碼，稱為操作一次；例如：04→01、50→50。對於得到新的數碼可以繼續操作，例如：79→24→57...，現在，取一開始的數碼為 11，那麼連續操作 2020 次之後所得到的數碼為_____。

二、填充題(每題 7 分)

7. 求 $\frac{2^3+1}{2^3-1} \times \frac{3^3+1}{3^3-1} \times \frac{4^3+1}{4^3-1} \times \dots \times \frac{100^3+1}{100^3-1}$ 之值_____。
8. 設某六邊形的三組對邊互相平行，且其邊長依序為 4、6、8、6、4、10，求此六邊形的面積_____。
9. 將 $A=2^n - n^2$ 計算後(其中 $1 \leq n \leq 109$ ， n 為自然數)，若 A 為 5 的倍數，試問這樣的 A 有多少個數值_____。
10. 設 $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n, \dots$ (其中 n 為自然數) 為一群多邊形，其作法如下： T_1 為邊長 1 之正三角形、以 T_n 每一邊中間三分之一線段為一邊，向外做正三角形，然後擦掉該三分之一線段後所得的多邊形為 T_{n+1} ($n=1, 2, 3, \dots$)，求 T_3 的面積_____平方單位。
11. 假設 A 細菌每過 5 小時數量變為 4 倍，B 物質每過 10 小時重量變為 0.25 倍，2020 年 7 月 24 日零時，量測出 A 細菌的總數為 n 個及 B 物質的重量為 w 公克，一段時間後 A 細菌變為 $1000n$ 個及 B 物質的重量為 rw 公克，試求 $r =$ _____。
(四捨五入至小數點以下第 3 位)

三、計算證明題(只有答案沒有計算過程不予計分)

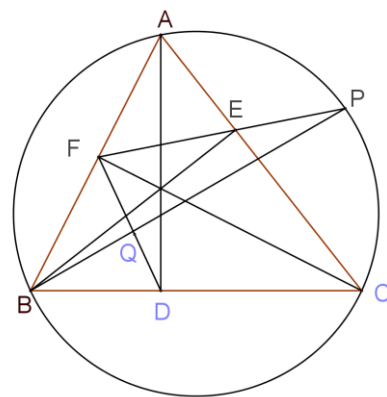
1. 如右圖(圖形僅作為參考、不代表實際大小、但可使用圖做說明)，



銳角 $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 為三高，且點 D, E, F 依序為三邊 $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ 上的垂足，

求證：(1) $\triangle ABC$ 與 $\triangle CDE$ 為相似三角形。(2) $\triangle ABC$ 的垂心是 $\triangle DEF$ 的內心。(4+5 分)

2. 如右圖，銳角 $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D、 $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ 於 E、 $\overline{CF} \perp \overline{AB}$ 於 F，



直線 \overline{EF} 與 $\triangle ABC$ 外接圓交於點 P， \overline{BP} 與 \overline{DF} 交於 Q，

試證明：(1) A, F, Q, P 四點共圓。(2) $\overline{AP} = \overline{AQ}$ 。(每小題 5 分)

3. 試求 x 的方程式 $\sqrt{x + \frac{3}{x} + 42} + \sqrt{x + \frac{3}{x} + 30} = 2x$ 、 $x \neq 0$ 的所有正實數解。(8 分)

4. 設 p 為質數、 $p > 2$ ，若 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1} = \frac{b}{a}$ ，其中 a, b 為正整數，且 a, b 互質，試證明： p 為 b 的因數。(8 分)