國立彰化高級中學 109 學年度資優班甄選—複選實作評量【數學科】簡答卷

得分	

注意事項：

1. 本試題卷有 2 頁。題目有 11 題填充題與 4 題計算證明題，給分方式依據題目說明，不得使用計算機。
2. 本答案卷有 2 頁。填充題寫在第 1 頁、計算證明題寫在第 2 頁，並將試題卷、答案卷、計算紙交回。
3. 所有圖形僅作參考，不代表實際大小。
4. 答案需化至最簡(最簡根式、最簡分數)，才予以計分。
5. 「計算證明題」需在計算欄內寫上計算過程(勿寫錯格)，不需抄題，只有答案沒有計算過程不予計分。

一、填充題(每題 5 分)

1	2	3	4	5	6
$2\sqrt{2}+1$	甲乙同時遇到木箱	297	13	30	00

二、填充題(每題 7 分)

7	8	9	10	11
$\frac{5050}{3367}$	$57\sqrt{3}$	21	$\frac{10\sqrt{3}}{27}$	0.032

三、計算證明題(只有答案沒有計算過程不予計分)

1. (4+5 分) 略

2. (5+5 分) 略

3. (8 分) $\frac{7+\sqrt{37}}{2}$

4. (8 分) 略

1. (1) C,E,H,D 四點共圓 $\Rightarrow \angle HED=\angle HCD \Rightarrow \angle DEC=\angle ABC$ $\therefore \Delta ABC$ 與 ΔCDE 為相似三角形(AA 相似) 。

(2)承(1) $\angle DEC=\angle ABC \Rightarrow \angle BED=90^0-B$

同理 A,E,H,F 四點共圓、$\angle AEF=\angle AHF=\angle B \Rightarrow \angle BEF=90^0-B$ 因此 $\overline{BE}$ 為 $\angle DEF$ 角平分線。

同理 $\overline{CF}$ 為 $\angle EFD$ 角平分線，即 H 為 ΔDEF 內心。

2. (1)由第一題，同理可得 ΔABC 與 ΔBFD 為相似三角形，$\angle BFD=\angle ACB$，即 $\angle AFQ=180^0-C$ 。

又 $\angle APB=\angle C$ ，因此 A,F,Q,P 四點共圓。

(2)由(1)因為 A,F,Q,P 四點共圓，因此 $\angle AQP=\angle AFP=\angle AFE=\angle C=\angle APQ$ ，因此 $\overline{AP}=\overline{AQ}$ 。

3. 令 $a=\sqrt{x+\frac{3}{x}+42}$、$b=\sqrt{x+\frac{3}{x}+30}$

因此 $a^2=x+\frac{3}{x}+42$、$b^2=x+\frac{3}{x}+30 \Rightarrow a^2-b^2=12$、$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{12}{2x}=\frac{6}{x}$

$a=\frac{2x+\frac{6}{x}}{2}=x+\frac{3}{x} \Rightarrow a^2=a+42 \Rightarrow a=7 \Rightarrow x+\frac{3}{x}+42=a^2=49 \Rightarrow x^2-7x+3=0 \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{37}}{2}$

檢查 $x=\frac{7-\sqrt{37}}{2}$，代入 $\sqrt{x+\frac{3}{x}+42}+\sqrt{x+\frac{3}{x}+30}=7+\sqrt{37}$ 使得 $7+\sqrt{37}$ 與 $2x=7-\sqrt{37}$ 不合，得 $x=\frac{7+\sqrt{37}}{2}$ 。

4. 設 p 為質數、$p>2$，因此 $p-1$ 為偶數

$\Rightarrow \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+......+\frac{1}{p-1}=(1+\frac{1}{p-1})+(2+\frac{1}{p-2})+(3+\frac{1}{p-3})+...$

$=\frac{p}{1\times(p-1)}+\frac{p}{2\times p(-2)}+\frac{p}{3\times(p-3)}+...=p(\frac{1}{1\times(p-1)}+\frac{1}{2\times(p-2)}+\frac{1}{3\times(p-3)}+...)$

$=p(\frac{h}{1\times(p-1)\times2\times(p-2)\times3\times(p-3)\times...})$，其中 h 為正整數

因此 $=p(\frac{h}{1\times(p-1)\times2\times(p-2)\times3\times(p-3)\times...})=\frac{ph}{1\times(p-1)\times2\times(p-2)\times3\times(p-3)\times...}=\frac{b}{a}$

又 a,b 互質、且 ph 與 $1\times(p-1)\times2\times(p-2)\times3\times(p-3)\times...$ 也互質因此 $b=ph$ ，即 p 為 b 的因數