

※答案須化成「最簡分數」或「最簡根式」，並請寫在答案卷上。

一、填充題【第 1~4 題，每題 6 分；第 5~12 題，每題 7 分，共 80 分】

1. 設 P 點對半徑為 1 的圓作兩切線，切點分別為 A 、 B ，若切線段長 $\overline{PA} = \overline{PB} = 20$ ，試求 $\triangle PAB$ 的外接圓面積為_____。

2. 假設 x, y 皆為實數，若 $|x-2| \leq 1$ 且 $\left|y-\frac{7}{2}\right| \leq \frac{13}{2}$ ，求 $xy+2x$ 的最小值為_____。

3. 有一個 2022 項的等差數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2022}$ 且 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2022} = a_{120} = 120$ ，試求 $a_{1903} =$ _____。

4. 若方程式 $x^2 - x - 36 = 0$ 的兩根為 α, β ，則 $\frac{\beta^2 - 18}{\alpha - 37} + \frac{\alpha^2 - 18}{\beta - 37} =$ _____。

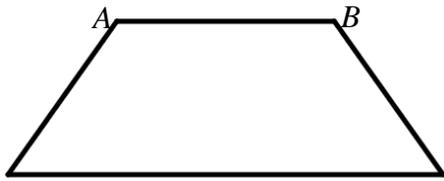
5. 長方形紙片 $ABCD$ 的長 $\overline{AB} = 21$ 、寬 $\overline{AD} = 20$ ，將其對摺使得 A 與 C 重合，試求摺痕長度為_____。

6. 有兩個數列： $\langle a_n \rangle$ 是首項為 1、公差為 7 的等差數列， $\langle b_n \rangle$ 是首項為 1、公比為 7 的等比數列，試求 $a_{171} \cdot b_{171}$ 除以 171 的餘數為_____。

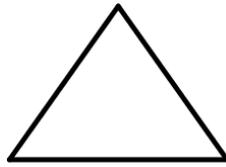
7. 若正整數 n 滿足： $\frac{n}{2}$ 為整數， $\frac{n}{3}$ 為完全平方數， $\frac{n}{5}$ 為完全立方數，則 n 的最小值為_____。

8. 若 x, y 為互質的正整數，且 $\sqrt{\frac{y}{x}}$ 四捨五入取到小數點以下第一位的近似值為 0.7，又 $x+y=40$ ，則 $x=$ _____。

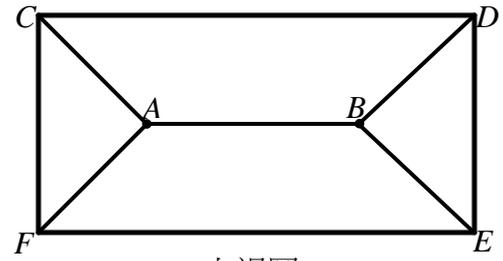
9. 有一個五面體造型的物體放置於地面，其左右兩側面皆為正三角形，它的前視圖為等腰梯形、右視圖等腰三角形、上視圖長方形，圖形如下。若 $\overline{AB} = \overline{DE} = 1$ 公尺、 $\overline{CD} = 2$ 公尺，試求此物體高度為_____公尺。



前視圖



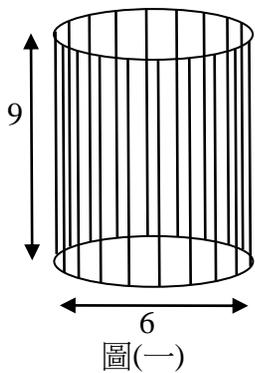
右視圖



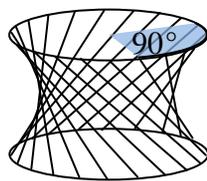
上視圖

10. 阿彰連續投擲一顆公正的骰子，直到連續出現兩次 6 點才停止。若他投擲到第 7 次才停止，請問在這樣的過程中，各種點數可能出現的順序，總共有_____種。

11. 有一裝飾物的上下兩圓環直徑皆為 6 公分，並且以長度為 9 公分的細繩連接，垂直懸掛，此時上下兩圓環的距離為 9 公分，如圖(一)所示。若上圓環固定，下圓環旋轉 90° 且保持在正下方，細繩仍不能彎曲，如圖(二)所示，試求此時上下兩圓環的距離是_____公分。



圖(一)



圖(二)

12. Online shopping is popular nowadays, and shopping vouchers(購物券) are no exception. A bakery has launched shopping vouchers online, and the discounts are as follows: each purchase(購買) is limited to 100 pieces, the basic number is 30 pieces, and each piece is charged 200 dollars. If the number of purchases exceeds(超出) the basic number, each one is added, each can be 20 dollars cheaper. The question is: if a company spent 13740 dollars buying the shopping vouchers as a gift, how many pieces did the company buy?_____。

二、計算證明題【每題 10 分，共 20 分。請寫出計算過程，否則不予計分】

1. 試求方程式 $\sqrt{x^2+1} - |2x+1| - 1 = 0$ 的實數解 $x = ?$

2. $\triangle ABC$ 中，令 $\angle C = \theta$ 且 $\cos\theta = \frac{1}{8}$ 、 $\overline{BC} = 2$ 、 $\overline{AC} = 1$ ，如下附圖，若 K 、 G 、 I 分別為 $\triangle ABC$ 的外心、重心、內心，試求 $\angle AKB - \angle AIB + \angle AGB = ?$ (答案卷有三張附圖，可自由參考使用)

