國立彰化高級中學 112 學年度資優班甄選---複選實作評量【數學科】試題卷

※答案需化成「最簡分數」或「最簡根式」，並請寫在答案卷上

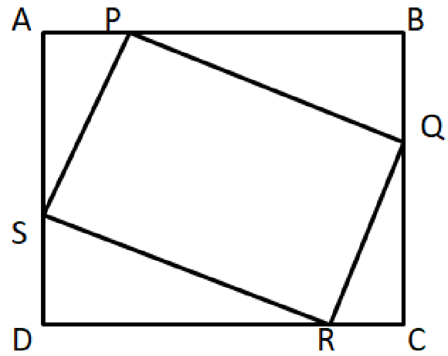
一、填充題(每格 7 分，共 84 分)

1.將九個數 1、3、5、9、15、25、45、75、225 不重複地填入右圖 3×3 的方格表的格中，使得方格表中不論將任三個直的、橫的、或對角線上的數相乘，乘積都相同，請問表中「※」格內應填________。

	※	

2. 一位古怪的數學老師給他的學生出了這道問題,他首先在黑板上寫八個數碼 1、2、3、4、5、7、8、9。然後他讓學生將這些數碼分成兩組,每組各有四個數碼;然後將每組的這四數碼排列組合成二個兩位數再相加。要求每組中的兩個數相加的和必須是相等的兩位數。請問這個和的最大可能值是__________。

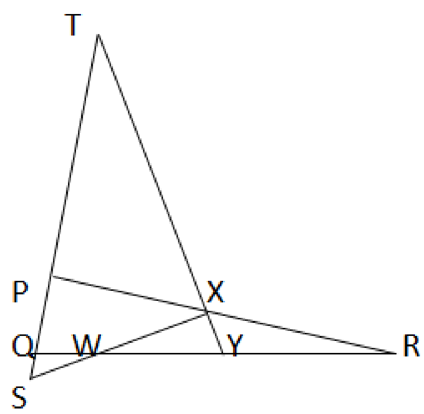
3.一個 38×32 的矩形 ABCD 如右圖，點 P、Q、R、S 分別為在線段 AB、線段 BC、線段 CD、線段 DA 邊上的點，如右圖所示。已知線段 AP、線段 PB、線段 BQ、線段 QC、線段 CR、線段 RD、線段 DS、線段 SA 的長度都是正整數單位，且 PQRS 為矩形，請問矩形 PQRS 的面積的最大可能值為__________。



4.令$f(x)=\frac{x+6}{x}$且$f_n(x)=f(f(\dots(f(x))$為n層f的合成函數。例如：$f_2(x)=\frac{\frac{x+6}{x}+6}{\frac{x+6}{x}}=\frac{7x+6}{x+6}$、$f_3(x)=\frac{\frac{7x+6}{x+6}+6}{\frac{7x+6}{x+6}}=\frac{13x+42}{7x+6}$。已知集合 S 為方程式$f_n(x)=x$的所有實根的集合，請問集合 S 有________個元素。

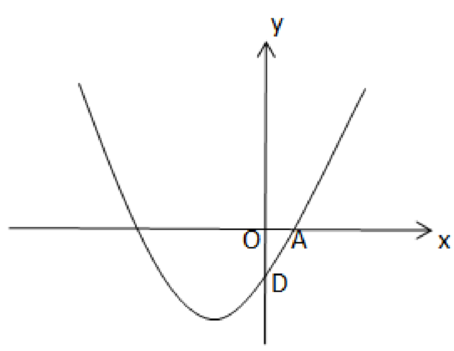
5.<u>老彰</u>被雇用將 80 間在同一排的房子上釘門牌號碼。他將編號從 1 到 80 的數碼釘在前門。這些門牌號碼是由許多印有單個數碼的銅牌拼組而成的。他突然發現在這條街上已經有房子編號為 1 號到 64 號，因此他必須將這些編號重新換為 65 號到 144 號。若他想盡可能多地使用舊的數碼銅牌(其中 6 號和 9 號銅牌可上下顛倒互相代用)，請問他至少還需補充________片新的數碼銅牌。

6. 如右圖所示，點 X、Y 及 W 位於△PQR 的邊上使得線段 QW：線段 WY：線段 YR = 1：2：3 且 線段 PX：線段 XR = 4：5，若線段 QS = 11 cm，請問線段 ST 的長度是________ cm。

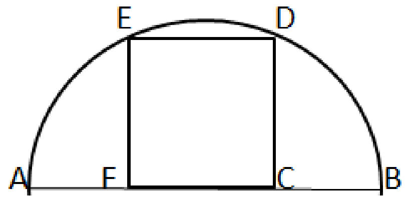


7.考慮數列 a_1、a_2、a_3、a_4、... 使得 $a_1=2$ 且對於每一個正整數 n，$a_{n+1}=a_n+p_n$ 其中 p_n 為 a_n 的最大質因數。這個數列的前幾項為 2, 4, 6, 9, 12, 15, 20。請問使得 a_n 是一個五位數的 n 之最小值是________。

8.設$y=ax^2+bx+c$的圖形如右圖所示，若線段 OA=線段 OD，且 D(0,m)，求 ab 值的範圍(以 m 表示)為______________。



9. 如右圖，在以線段 AB 為直徑的半圓中內接正方形 CDEF，其邊長為 1，若線段 AC=a，線段 BC=b，則$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=$ ________。



10. 若 a、b 是正實數，且$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}=0$，則$(\frac{b}{a})^3$+$(\frac{a}{b})^3=$ ________。

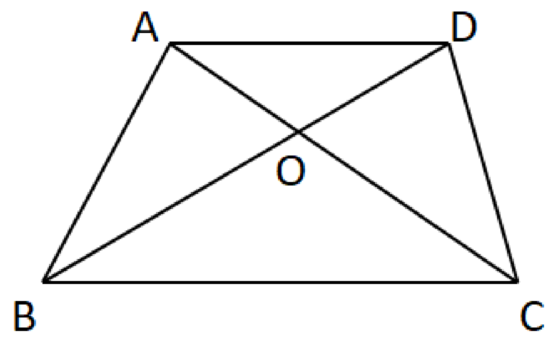
11. 設一數列U_n滿足$U_1=5$及$U_{n+1}-U_n=3+4(n-1)$，其中 n 是正整數，如果U_n可以用一個 n 的多項式表示，則此多項式為 ____________。

12. 有一正整數x被 3、5、7 除之的餘數分別為 2、4、5，若$2200<x<2300$，則$x=$ ________。

二、證明題 【共 16 分 。請寫出過程，否則不予計分】

1.如右圖，梯形 ABCD 中，線段 AD//線段 BC，兩對角線 AC、BD 相交於 O。

證明：$\sqrt{\triangle BOC面積}+\sqrt{\triangle AOD面積}=\sqrt{ABCD面積}$。(8 分)



2.如右圖，在正△ABC 內取一點 P，求證：$\overline{PB}+\overline{PC}>\overline{PA}$ 。(8 分)