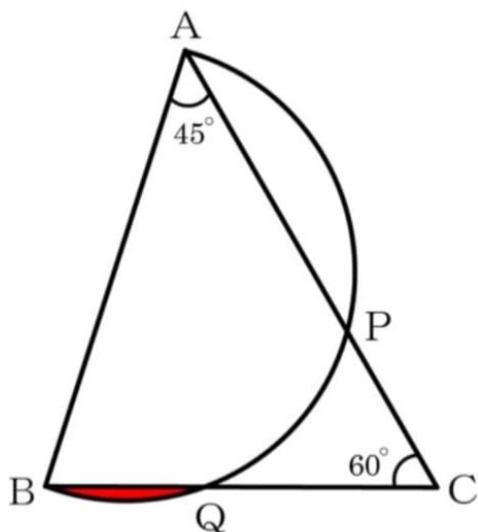


國立彰化高級中學110學年度資優班甄選---複選實作評量【數學科】試題卷

填充題(一)，每題 6 分，共 30 分。

1. 「志明在情人節那天寫了一封情書跟春嬌告白，信中只有一個分數： $\frac{5200794}{9999}$ ；春嬌看完了之後，終於明白志明的心意。」試問： $\frac{5200794}{9999}$  化成小數，在小數點後第 100 位數字為\_\_\_\_\_。
2. 有一面積是 16 的凸四邊形  $ABCD$  滿足： $\overline{AD} = \overline{CD}$ 、 $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ，若  $\overline{BC} = 5$ ，則四邊形  $ABCD$  周長為\_\_\_\_\_。
3. 已知  $\triangle ABC$  的  $\angle A = 45^\circ$ 、 $\angle C = 60^\circ$ ，今以  $\overline{AB}$  為直徑做一個半圓，交  $\overline{AC}$  於  $P$  點，交  $\overline{BC}$  於  $Q$  點，如圖；若  $\overline{AP} = 6\sqrt{2}$ ，則此半圓與線段  $\overline{BC}$  所圍出的區域(陰影部分)面積為\_\_\_\_\_。



4. 設  $\alpha$ 、 $\beta$  為  $x$  的方程式： $x^2 - 12x + m = 0$  的兩個正實根，若  $\alpha$ 、 $\beta$ 、8 這三數可以形成一個三角形的三邊長，則實數  $m$  的範圍為\_\_\_\_\_。
5. If  $x + y + z = 7$ 、 $xy + yz + zx = 15$ 、 $xyz = 8$ ，then the value of  $(x + y)(y + z)(z + x) =$ \_\_\_\_\_。

填充題(二) 每題 8 分，共 48 分。

1. 有一個數列： $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$ 、 $f$ ，其中每一項只能是 0 或 1 或 2，且  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ 、

$d^2 + e^2 + f^2 \neq 0$ 、 $(a - d)^2 + (b - e)^2 + (c - f)^2 \neq 0$ ，滿足上述條件的數對

$(a, b, c, d, e, f)$  共有\_\_\_\_\_組。

2. 一個長度是  $n$  的訊息是由  $n$  個數字排列組成，且每個數字都只能是 0 或 1，例如：

1101 與 0111 是兩個長度是 4 的訊息；定義兩個長度是  $n$  的訊息之距離為其「相對應位置是不同數字的個數」，例如：1101 與 0111 在第 1 與第 3 個位置的數字不同，所以其距離為 2。試問：長度是 7 且與 1101000 之距離大於 3 的訊息有\_\_\_\_\_個。

3. 若大於 4 的實數  $a$  可經多次「開平方運算」變為小於 2 的實數，設其所需最小次數為  $f(a)$ ，

例如： $\sqrt{20} > 2$ 、 $\sqrt{\sqrt{20}} > 2$ 、 $\sqrt{\sqrt{\sqrt{20}}} < 2$ ，所以  $f(20) = 3$ 。

試問： $f(120^4) =$ \_\_\_\_\_。

4. 有一隻青蛙在座標平面上做一系列的跳躍：從  $(0, 0)$  開始跳動，每一次跳躍是「平行  $x$  軸方向跳躍一單位或平行  $y$  軸方向跳躍一單位」；試問這隻青蛙要跳到直線  $3x + 7y = 89$  上，至少需要跳躍\_\_\_\_\_次。

5. 有一  $\triangle ABC$ ，已知其面積為 110，今在  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  邊上依序取一點  $P$ 、 $Q$ ，設長度比值：

$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = x$ 、 $\frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}} = y$ ，若  $x + 3y = 1$ ，則  $\triangle APQ$  面積最大值為\_\_\_\_\_。

6. 座標平面上有一正八邊形  $ABCDEFGH$ ，已知  $A$ 、 $B$  兩點的座標依序為  $(0, 0)$ 、 $(4, 2)$ ，則  $H$  點座標為\_\_\_\_\_。(兩解)

計算證明題(沒有計算過程不給分) 共 22 分。

1. 有一公差是 3 的等差數列，已知首項是 2，末項是 110；試回答下列問題：

(1) 將其全部相加： $2 + 5 + \dots + 110$ ，其總和為\_\_\_\_\_。(3分)

(2) 將其全部相乘： $2 \times 5 \times \dots \times 110$ ，其乘積末尾共有連續\_\_\_\_\_個 0。

(108000 末尾共有連續 3 個 0) (4分)

2. (1) 已知： $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ，試因式分解  $x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2$ 。

(4分)

(2) 若  $x$  是被 4 除餘 1 的正整數，試證明： $x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2$  恆為 64 的倍數。(3分)

3. 設  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  為圓上相異四點，若此圓的圓心為  $O$ ，且兩線段  $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$  互相垂直，如圖(此為示意圖，非實際比例關係)。試回答下列問題：

(1)  $\angle AOB + \angle COD =$  \_\_\_\_\_。(4分)

(2) 若  $\overline{AB} = 10$ 、此圓的直徑為 14，則  $\overline{CD} =$  \_\_\_\_\_。(4分)

