

# 國立彰化高級中學 113 學年度科學班甄選實驗實作數學科試題

注意事項：

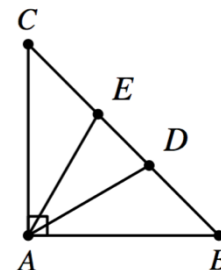
1. 本試題有第一部分：12 題填充題，每題 5 分。第二部分：5 題計算證明題，每題 8 分。圖形僅做為參考，不代表實際大小。
2. 答案請化簡，並依序填入答案欄內。若為分數，以最簡分數呈現。若為根式，以最簡根式與分母有理化呈現。
3. 若答案超過 1 個，需全對才給分。計算題只有答案，沒有計算過程不予給分。

第一部分：填充題（共 60 分。）

1.  $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + 21^2 + 34^2 + 55^2 + 89^2 =$ \_\_\_\_\_。
2. 設  $a - b = 20 + \sqrt{24}$  且  $b - c = 20 - \sqrt{24}$ ，則  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$  之值為\_\_\_\_\_。
3. 設  $m$  為  $x^2 + x - 1 = 0$  的一個根，則  $(m^4 - 5m^2 + 4)(m^2 + 3m) =$ \_\_\_\_\_。
4. 正整數  $x, y$  滿足  $\sqrt{x} + \sqrt{2024} = \sqrt{xy + 2024}$ 。試求滿足條件的所有  $x$  總和為\_\_\_\_\_。
5. 已知  $f(x)$  與  $g(x)$  皆為二次函數，且最高次係數分別為 3、-3。且兩函數圖形皆通過  $A(17,51)$ 、 $B(20,48)$ 。試求  $f(1) + g(1) =$ \_\_\_\_\_。
6. 二次函數  $f(x) = x^2 - 2ax - 2$  在  $-1 \leq x \leq 2$  時有最大值 6，則  $a =$ \_\_\_\_\_。
7. 設  $[x]$  表示不大於實數  $x$  的最大整數，例如： $[2.3] = 2$ 、 $[-1.7] = -2$ 、 $[3] = 3$ 。則滿足方程式  $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{5}\right] = 200$  的所有正整數  $n$  之總和為\_\_\_\_\_。
8. 小科與小學參加校內數學學科能力競賽，小科答錯全部試題的  $\frac{2}{9}$ ，小學答錯 10 題，此外兩人同時答錯的題目為全部試題的  $\frac{1}{6}$ 。若他們同時答對的題目超過 40 題，則他們同時答對\_\_\_\_\_題。
9. 若一等比數列  $\{a_n\}$  首項為  $a$ ，公比為  $r$ ，則前  $n$  項總和為  $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 。令  $f(n)$  為  $n$  的所有正因數之平方和。例如： $f(6) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 6^2 = 50$ ，則  $2^{11} \times \left( \frac{f(1088)}{1088^2} - \frac{f(544)}{544^2} \right)$  之值為\_\_\_\_\_。

10. 將數字1、2、3、4、5、6、7等七個數字排成「數字不重複」的七位數，使得前四個數字從左到右越來越大，且後四個數字從左到右越來越小，滿足此條件的七位數共有\_\_\_\_\_個。

11. 如右圖，已知 $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形， $\angle BAC = 90^\circ$ ，且 $\overline{AB} = 1$ ， $\overline{AD}$ 、 $\overline{AE}$ 將 $\angle BAC$ 三等分。令 $\overline{BD} = a$ ， $\overline{AD} = b$ ，試求 $\frac{2}{a} - \sqrt{2}b =$ \_\_\_\_\_。



12. 設三角形  $ABC$  是等腰三角形滿足： $\angle A = 30^\circ$ 、 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 、 $\overline{BC} = 4$ ，則三角形  $ABC$  面積為\_\_\_\_\_。

第二部分：計算證明題（共 40 分。）

1. (1) 因式分解： $t(t+1)(t+2)(t+3)+1$ 。

(2) 解方程式： $x^2 - 1 = 997 \times 998 \times 999 \times 1000$ 。

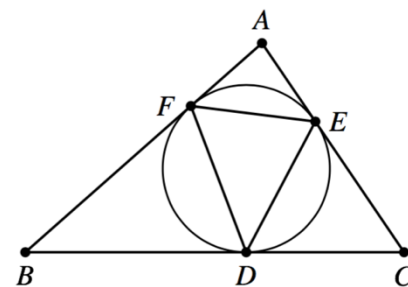
2.  $p$ 、 $q$  皆為質數且滿足  $p^3 + p^2 + 11p + 2 = q$ ，試求  $p$ 、 $q$ 。

3. 設  $x, y, z, u$  為正整數，若  $x + y = 2(z + u)$ ， $x + z = 2(y + u)$ ， $x + u = 4(y + z)$ ，則  $x$  的最小可能值為？

4. 已知  $D, E, F$  為  $\triangle ABC$  之內切圓與邊之切點，如圖所示。

(1) 試證明： $\angle EDF = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$ 。

(2) 給定  $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{AC} = 4$ ，試求  $\triangle DEF$  面積與  $\triangle ABC$  面積之比值為？



5. 解方程式： $\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = x$ 。