國立彰化高中 109 學年度學科能力競賽校內初賽數學科試題

班級：_____年_____班　座號：　　　　　　　姓名：

一、填充題：每格4分，共60分。

1. 設 a,b 均為正整數且滿足 $a>b,(a+1)(b+1)=18,a^2b+ab^2=70$，求 $a+2b$ 之值 $=$ _____。

2. 若實數 x 滿足 $\sqrt{\frac{x}{2}}-\frac{1}{9}x+2=0$，則 $x=$ ______。

3. 若 $\tan\alpha$ 與 $\tan\beta$ 為 $3x^2-7x+1=0$ 的兩根，則 $\sin^2(\alpha+\beta)-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-3\cos^2(\alpha+\beta)=$ ______。

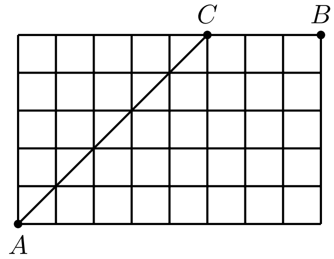
4. 設 $f(x)$ 為次數不超過二次的實係數多項式，且 $(x^2+x+1)f(x)$ 除以 x^3-2x^2-x-3 的餘式為 1，則 $f(x)=$ ______________。

5. 試求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n^3+3n^2+2n}\right)=$ _______。

6. 設 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 為定義在正整數的實數值函數。已知 $f(1)=2021$ 且對所有的正整數 $n>1$，恆有 $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=n^2f(n)$，試求 $f(2021)=$ _______。

7. 已知函數 $f(x)=\log(x+1)$，則 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{1}{199}\right)=$ ＿＿＿＿。

8. 如右圖，從 A 點走到 B 點且沒碰到對角線 $\overline{AC}$ 的捷徑有 ＿＿＿＿ 種。

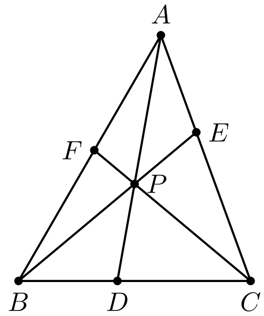


9. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊分別為 a,b,c。若 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的大小成等比數列，且 $b^2-a^2=ac$，則 $\angle B$ 的弧度為 ＿＿＿＿。

10. $(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)\cdots(1+\tan 44^\circ)(1+\tan 45^\circ)=$ ＿＿＿＿。

11. 試求從 72 的正因數中任取 a,b,c 三個，使得 a 是 b 的因數，b 是 c 的因數的機率 $=$ ＿＿＿＿。

12. 如右圖，已知 P 為三角形 $\triangle ABC$ 內部一點，若 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PD}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{PE}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{PF}}=2020$，則 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PD}}\times\dfrac{\overline{BP}}{\overline{PE}}\times\dfrac{\overline{CP}}{\overline{PF}}=$ ＿＿＿＿。



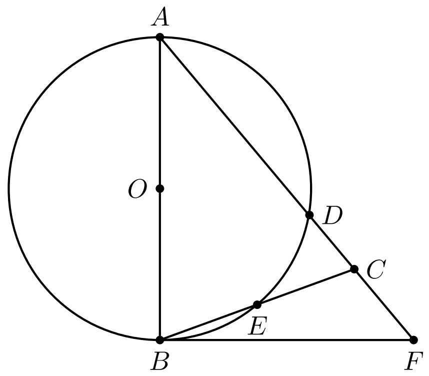
13. 一正數 x 的整數部分記為 a(即 $a=[x]$，[ ] 為高斯記號)，小數部分記為 b，其中 $0\le b<1$，則所有滿足 $a^2=x\cdot b$ 的正數 x 為 ______。

14. 若一個正八面體的頂點恰好為一個正立方體各面的中心點 (即各面對角線之交點)，設正八面體的體積為 a，正立方體的體積為 b，求 $\dfrac{a}{b}=$ ______。

15. 若平面向量 $\overrightarrow{u}=(a,b),\overrightarrow{v}=(c,d)$ 滿足 $|\overrightarrow{u}|=|\overrightarrow{v}|=1$ 且 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{2}$，則 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 所張出的平行四邊形面積 $=$ ______。

二、計算證明題：(共40分)

1. (10 分) 如圖，$\triangle ABC$ 中 $\overline{AB}=\overline{AC}$，以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓 O 交 $\overline{AC}$ 於 D 且交 $\overline{BC}$ 於 E，而圓 O 在 B 點的切線與 $\overline{AC}$ 的延長線相交於 F。試證：$\overline{AD}\cdot\overline{CF}=2\overline{BE}^2$。



2. (10 分) 設 $a_1=1$ 且 $a_n=\dfrac{3}{4}a_{n-1}+\dfrac{5}{4{a_{n-1}}^3}$，其中 $n=2,3,4,\cdots$。證明：對所有正整數 $n,n\ge 2$，$2\ge a_n>\sqrt[4]{5}$ 均成立。

3. (10 分) 設正實數 a,b,c 滿足條件 $a+b+c \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$，試證 $a+b+c \geq \frac{3}{a+b+c}+\frac{2}{abc}$。

4. (10 分) 如圖，$\overline{AB}=\overline{CD}$，$M$ 為 $\overline{AD}$ 的中點，N 為 $\overline{BC}$ 的中點，兩直線 AB 和 CD 分別交直線 MN 於 P、Q 兩點。試證：$\angle APM = \angle DQM$。