班級：__________ 座號：_____ 學號：_______________ 姓名：_______________

國立彰化高中 109 學年度學科能力競賽校內初賽數學科答案卷　參考答案

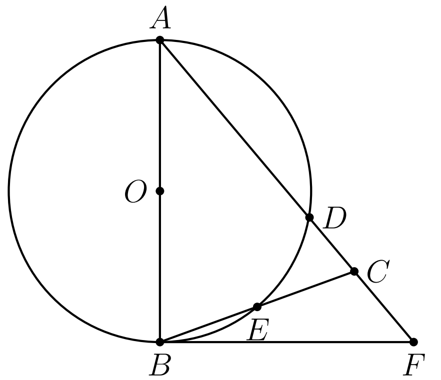
說明：請將答案化至最簡並有理化。　　　　考試日期：110.07.28

一、填充題：每格 4 分，共 60 分

1	2	3	4
9	72	$\frac{9}{53}$	x^2-2x-2
5	6	7	8
$\frac{65}{264}$	$\frac{1}{1011}$	2	297
9	10	11	12
$\frac{2\pi}{7}$	2^{23}	$\frac{25}{216}$	2022
13	14	15	
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	

二、計算證明題：請自行書寫於題目下方空白處 (共40分)

1. 如圖，$\triangle ABC$ 中 $\overline{AB}=\overline{AC}$，以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓 O 交 $\overline{AC}$ 於 D 且交 $\overline{BC}$ 於 E，而圓 O 在 B 點的切線與 $\overline{AC}$ 的延長線相交於 F。試證：$\overline{AD}\cdot\overline{CF}=2\overline{BE}^2$。



解： 連接 $\overline{AE},\overline{DE}$，
首先因為 $\angle CBF=\angle EAB$，且 $\angle AEB=90^\circ$ (因為 $\overline{AB}$ 是直徑)，
又 $\overline{AB}=\overline{AC}$，得到 $\angle ABE=\angle ACE$，所以 $\angle BAE=\angle CAE$，
於是 $\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{DE}$。
考慮 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCF$，因為 $\triangle CDE$ 中的 $\overline{DE}=\overline{CE}\implies \angle ADE=\angle BCF$，又 $\angle DAE=\angle BAE=\overset{\frown}{BE}=\angle CBF$，由三角形 AA 相似性質得 $\triangle ADE\sim\triangle BCF$。
故 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CF}}\implies \overline{AD}\cdot\overline{CF}=\overline{BC}\cdot\overline{DE}=2\overline{BE}\cdot\overline{BE}=2\overline{BE}^2$。

2. 設 $a_1=1$ 且 $a_n=\frac{3}{4}a_{n-1}+\frac{5}{4a_{n-1}^3}$，其中 $n=2,3,4,\cdots$。證明：對所有正整數 $n,n\ge 2$，$2\ge a_n>\sqrt[4]{5}$ 均成立。

解： 由算幾不等式得 $a_n=\frac{1}{4}a_{n-1}+\frac{1}{4}a_{n-1}+\frac{1}{4}a_{n-1}+\frac{5}{4a_{n-1}^3}\ge 4\sqrt[4]{\frac{1}{4}a_{n-1}\times\frac{1}{4}a_{n-1}\times\frac{1}{4}a_{n-1}\times\frac{5}{4a_{n-1}^3}}=\sqrt[4]{5}$
又對任意正整數 n 而言，a_n 必為有理數，故 $a_n>\sqrt[4]{5}$。事實上，$a_n{}^4>5$，所以 $a_n=\frac{3}{4}a_{n-1}+\frac{5}{4a_{n-1}^3}<\frac{3}{4}a_{n-1}+\frac{a_{n-1}{}^4}{4a_{n-1}^3}=a_{n-1}$，得到 $\langle a_n\rangle$ 為嚴格遞減數列，

$$2\ge 1=a_1>a_2>\cdots>a_n$$

3. 設正實數 a,b,c 滿足條件 $a+b+c\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$，試證 $a+b+c\geq\frac{3}{a+b+c}+\frac{2}{abc}$。

解： 欲證 $3(a+b+c)^2\geq 9+2(a+b+c)^2$，

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b+c)\times(a+b+c)\\ &\geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\ &\geq (1+1+1)^2=9\end{aligned}$$

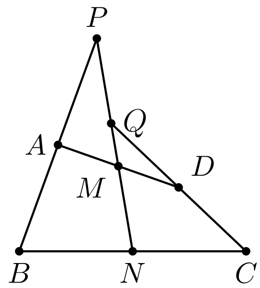
故 $3(a+b+c)^2\geq 9+2(a+b+c)^2$。又

$$\begin{aligned}\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab} &\leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\\ &\leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2\end{aligned}$$

故 $\frac{1}{abc}\leq\frac{1}{3}(a+b+c)$。

綜合可得 $3(a+b+c)^2\geq 9+2(a+b+c)\times\frac{3}{abc}\implies a+b+c\geq\frac{3}{a+b+c}+\frac{2}{abc}$

4. 如圖，$\overline{AB}=\overline{CD}$，$M$ 為 $\overline{AD}$ 的中點，N 為 $\overline{BC}$ 的中點，兩直線 AB 和 CD 分別交直線 MN 於 P、Q 兩點。試證：$\angle APM=\angle DQM$。



解： 設 $\triangle PAM$ 的外接圓半徑為 R_1，$\triangle QDM$ 的外接圓半徑為 R_2。$\triangle PBN$ 的外接圓半徑為 S_1，$\triangle QCN$ 的外接圓半徑為 S_2。

- 在 $\triangle PAM$ 及 $\triangle QDM$ 中，因為 $\overline{AM}=\overline{DM}$，由正弦定理可知

$$\frac{\overline{AM}}{\sin\angle APM}=2R_1,\ \frac{\overline{DM}}{\sin\angle DQM}=2R_2\implies\frac{\sin\angle APM}{\sin\angle DQM}=\frac{R_2}{R_1}\qquad(1)$$

  再由正弦定理可得 $\frac{\overline{PA}}{\sin\angle PMA}=2R_1,\ \frac{\overline{QD}}{\sin\angle QMD}=2R_2$。由圖可知 $\angle PMA+\angle QMD=180^\circ\implies\sin\angle PMA=\sin\angle QMD$，故 $\frac{\overline{PA}}{\overline{QD}}=\frac{R_1}{R_2}$

- 同理，
$$\frac{\sin\angle BPN}{\sin\angle CQN}=\frac{S_2}{S_1};\frac{\overline{PB}}{\overline{QC}}=\frac{S_1}{S_2}\qquad(2)$$

- 因為 $\angle BPN=\angle APM,\angle DQM=\angle CQN\implies\frac{R_2}{R_1}=\frac{S_2}{S_1}\implies\frac{\overline{PA}}{\overline{QD}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{QC}}=\frac{\overline{PA}+\overline{AB}}{\overline{QD}+\overline{DC}}$，將 $\overline{AB}=\overline{CD}$ 代入，交叉相乘計算可得 $\overline{PA}=\overline{QD}$，即 $\frac{\sin\angle APM}{\sin\angle DQM}=\frac{R_2}{R_1}=1\implies\angle APM=\angle DQM$