

國立彰化高級中學 110 學年度校內學科能力競賽數學科試題卷

一、填充題（每格 6 分，共 66 分，請小心計算，答案需化至最簡）

1. 將 $5^{2022} + 7^{2022} + 11^{2022}$ 除以 17 的餘數為_____。

2. 若一元三次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 的三根分別是 $x^3 - 3x^2 + 4x + 3 = 0$ 的三根的 5 次方，則 $a =$ _____。

3. 設 $a, b, c > 1$ ， $a + b + c = 111$ ，求 $abc - ab$ 的最大值為_____。

4. 求 $\tan 20^\circ + 4\sin 20^\circ =$ _____。

5. 設 $P(x, y)$ 為圓 $x^2 + y^2 = 4$ 上的動點，若 $k = \frac{7x + 3y - 13}{17x + 13y - 43}$ ，求 k 的範圍？_____。

6. 若 $x, y, z, w \in \mathbf{R}$ 滿足 $x + y + z + w = 17$ 、 $xy + xz + xw + yz + yw + zw = 97$ ，令 x 的最大值為 a 、最小值為 b ，求 $a^2 + b^2 =$ _____。

7. 在圓周上取 n 個相異點，任兩點作連線，這些線段最多可以將圓內部分割成 $P(n)$ 塊區域。數學家知道 $P(n)$ 是 n 的四次多項式函數。請問 $P(10) =$ _____。

8. 設 $f(x)$ 為實數函數，若對任意實數 u, v 均滿足 $f(u+v) + f(u-v) = \frac{f(u) \cdot f(v)}{2}$ 且 $f(1) = 2$ ，試求 $f(2020) =$ _____。

9. 滿足 $a + 2b + 3c + 4d = 111$ 、 $2a + 3b + 5c + 7d = 210$ 的非負整數解 (a, b, c, d) 共有 _____ 組。

10. 有 3 男 3 女參加非常男女交友社，經過一段時間相處後，要進行配對：每個男的只可選 3 個女的其中一個，但不可不選；反之每個女的只可選 3 個男的其中一個，亦不可不選。如果一男一女互相選擇對方稱為配對成功，試問：配對成功之對數的期望值為 _____ 對。

11. 同一平面上，若兩個三角形 $\triangle ABC$ 、 $\triangle PQR$ ，滿足：
$$\begin{cases} \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{CA} \\ 2\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + 3\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{AB} \\ 2\overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC} = \overrightarrow{BC} \end{cases}$$
，求 $\frac{\triangle ABC \text{ 面積}}{\triangle PQR \text{ 面積}} =$ _____。

二、證明題（共 34 分，各題配分如下）

1. (1) 若 n 為質數，請問： $2^n - 1$ 是否必為質數？若是，請證明之；若否，請舉反例。(7 分)

(2) 若 $2^n - 1$ 為質數，請問： n 是否必為質數？若是，請證明之；若否，請舉反例。(7 分)

2. 假設 H 為銳角 $\triangle ABC$ 的垂心，試證明： $(\tan A)\overrightarrow{HA} + (\tan B)\overrightarrow{HB} + (\tan C)\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}$ 。(10 分)

3. 如下圖， \overline{AD} 為直徑且 $\overline{AB} = a$ 、 $\overline{BC} = b$ 、 $\overline{CD} = c$ 、 $\overline{AD} = d$ ，求證： d 為 $x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0$ 的根。(10 分)

