

2018年第19屆亞洲物理奧林匹亞競賽 及第49屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊複選考試

理論試題

2018年2月3日

13:30~16:30

考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

- 一、限使用黑色或藍色原子筆作答。
- 二、本試題共有計算題六大題，每題25分，合計150分。
- 三、各計算題請在答案卷上指定之位置作答，每大題答案卷二頁。
- 四、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。

可能用到的數學公式(t 為時間, x 為任意物理量)

$$1. f'(x) \equiv \frac{df}{dx}, \quad f''(x) \equiv \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right);$$

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x}{dt^2}.$$

$$2. \int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a}, \quad m \neq -1;$$

$$\int (ax+b)^{-1} dx = (1/a) \ln(ax+b);$$

$$\frac{d}{dx}(ax+b)^m = ma \cdot (ax+b)^{m-1}; \quad \frac{d}{dx} \ln(ax+b) = a \cdot (ax+b)^{-1}.$$

$$3. \frac{de^{ax}}{dx} = e^{ax}, \quad \frac{d \sin ax}{dx} = a \cos ax, \quad \frac{d \cos ax}{dx} = -a \sin ax$$

$$\int \sin ax \, dx = -(1/a) \cos ax, \quad \int \cos ax \, dx = (1/a) \sin ax$$

$$4. \text{當 } |x| \ll 1, \quad (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x,$$

$$e^x \approx 1 + x, \quad \sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}.$$

$$5. \text{線性、常係數、齊次一階微分方程式 } ax'(t) + bx(t) = 0$$

的一般解形式為 $x(t) = \alpha e^{st}$,

其中 s 是右列一次方程式 $as + b = 0$ 的根,

而 α 是積分常數, 可由初始條件 $x(0)$ 決定。

$$6. \text{線性、常係數、齊次二階微分方程式 } ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$$

的一般解形式為 $x(t) = \alpha_1 e^{s_1 t} + \alpha_2 e^{s_2 t}$,

其中 s_1, s_2 是右列二次方程式 $as^2 + bs + c = 0$ 的根,

而 α_1, α_2 是積分常數, 可由初始條件 $x(0), x'(0)$ 決定。

2018年第19屆亞洲物理及第49屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

一、卡諾熱機

- (A) 卡諾熱機在兩個不同溫度的熱庫 (heat reservoir) 循環運作時，其過程均為可逆。考慮如圖 1 所示的卡諾熱機，熱機由二可逆等溫過程 ($a \rightarrow b$; $c \rightarrow d$) 和二可逆絕熱過程 ($b \rightarrow c$; $d \rightarrow a$) 組成。試計算每一過程中熱機內氣體 (假設為 n 莫耳的理想氣體) 熵的變化量。(以氣體壓力 (P)、體積 (V)、溫度 (T) 和其他相關常數表示。)(8 分)

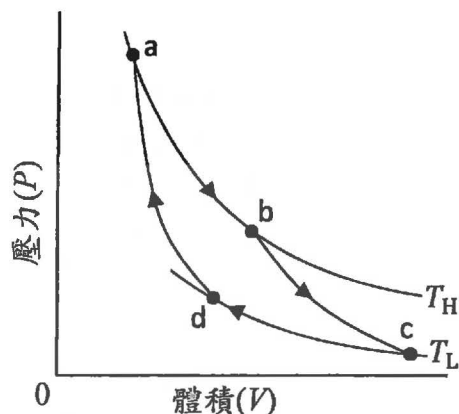


圖 1

- (B) 現考慮兩個具有相同熱容量 C 的物質，其起始溫度分別為 T_1 和 T_2 。今有一卡諾熱機以此二物質為其低溫和高溫熱庫，並假設卡諾熱機運行一循環時，二熱庫的溫度變化，遠小於其個別的溫度值。問此二物質的最終溫度為何？過程中卡諾熱機可作的最大功為何？(9 分)
- (C) 現考慮三個具有相同熱容量 C 的物質，其起始溫度分別為 $T_1=100\text{ K}$ ， $T_2=300\text{ K}$ 和 $T_3=300\text{ K}$ 。假設我們可以利用前述的卡諾熱機在物質 1 和 2 之間運轉輸出功，並以另一在物質 1 和物質 3 之間運轉的卡諾熱機，將所輸出的功完全用於提高物質 3 的溫度。問：
- 物質 1 所能達到的最低溫度 T_L 為何？(2 分)
 - 物質 3 可以達到的最高溫度 T_H 為何？(6 分)

二、反射光柵

光柵乃由周期性的結構(如狹縫)所組成，圖 2 為入射光束照射在一「反射光柵」的簡圖。我們常用單位長度 (公尺)內有 n 個周期性結構來描述光柵，即每個周期性結構寬度為 $1/n$ ，以下簡稱為光柵的狹縫密度。

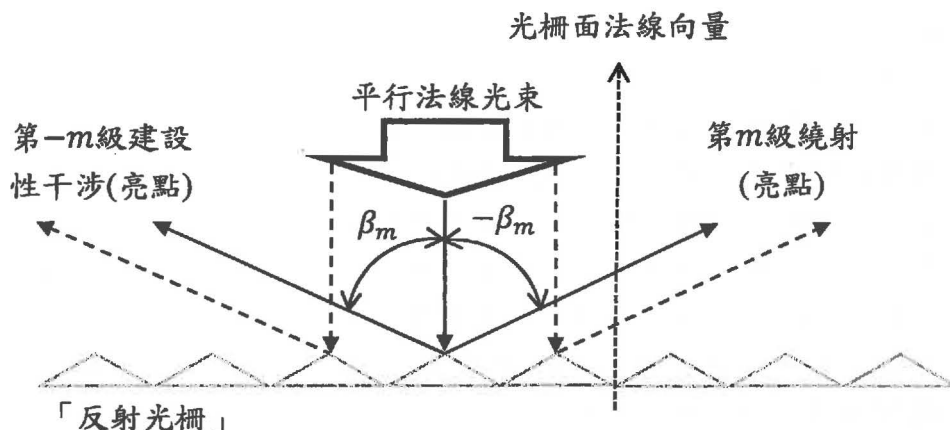


圖 2：入射光束正向入射光柵

- (A) 當入射光束以平行法線的方向入射「反射光柵」，則第 m 級繞射的角度為 β_m ，第 $-m$ 級繞射的角度為 $-\beta_m$ (相對於法線為逆時針方向者為正、順時針方向者為負)，兩者都在足夠遠的屏幕上產生亮點，證明 $\beta_m = \sin^{-1}(nm\lambda)$ 。(5 分)
- (B) 一「反射光柵」每公分有 200 條狹縫，由(A)之條件，當入射光波長為 500 nm 時，估算此「反射光柵」可以看到的最大繞射級數 m 值為何？(3 分)

考慮波長分別為 λ 與 $\lambda' (= \lambda + \Delta\lambda)$ 的兩個光波，當兩者經光柵 m 級繞射而產生之干涉亮紋，恰好都落在另一者所產生的暗紋位置上時，我們稱這兩個光波的 m 級繞射恰

可分辨，由此我們可得出光柵的 m 級繞射解析度 $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ 。

- (C) 考慮一個寬度為 W 、單位長度有 n 條狹縫的光柵，由(A)小題之結果，求光柵的 m 級繞射解析度 R 。(6 分)
- (D) 鈉燈所發出的黃光有兩個波長，一為 589.00 nm，另一為 589.59 nm，如果要在第一級繞射時能夠分辨此二波長，則寬度為 1 公分的「反射光柵」最少需要有幾條狹縫？(3 分)

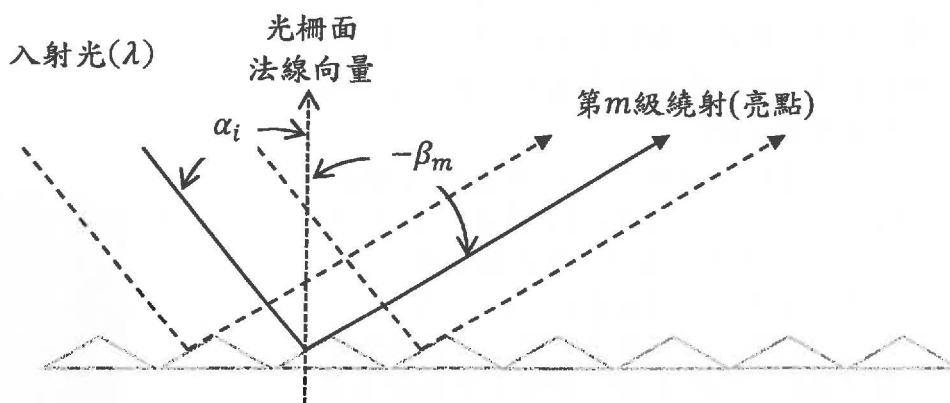


圖 3：入射光束與法線夾一角度 α_i 照射光柵(但垂直於狹縫方向)

- (E) 如圖 3 所示，入射光束以垂直於狹縫的方式照射（反射面與光柵的狹縫垂直，圖 3 中狹縫的方向垂直於紙面），且相對於「反射光柵」之法線方向以角度 α_i 射向光柵，因此產生第 m 級繞射，其角度為 $-\beta_m$ ，並在足夠遠的屏幕上產生亮點。已知光柵的狹縫密度為 n ，若 $m\lambda$ 可以寫為 α_i 、 β_m 、 n 的函數，即 $m\lambda = f(\alpha_i, \beta_m, n)$ ，求函數 $f(\alpha_i, \beta_m, n)$ 的表示式。(3 分)
- (F) 如圖 4 所示，若入射光束與狹縫方向垂直面間的夾角為 ϕ ，入射光與「反射光柵」之法線方向夾角為 α_i ，而第 m 級繞射的角度為 β_m 。已知光柵的狹縫密度為 n ，若 $m\lambda$ 可以寫成是 α_i 、 β_m 、 n 、 ϕ 的函數，即 $m\lambda = f(\alpha_i, \beta_m, n, \phi)$ ，求此函數 $f(\alpha_i, \beta_m, n, \phi)$ 。(5 分)

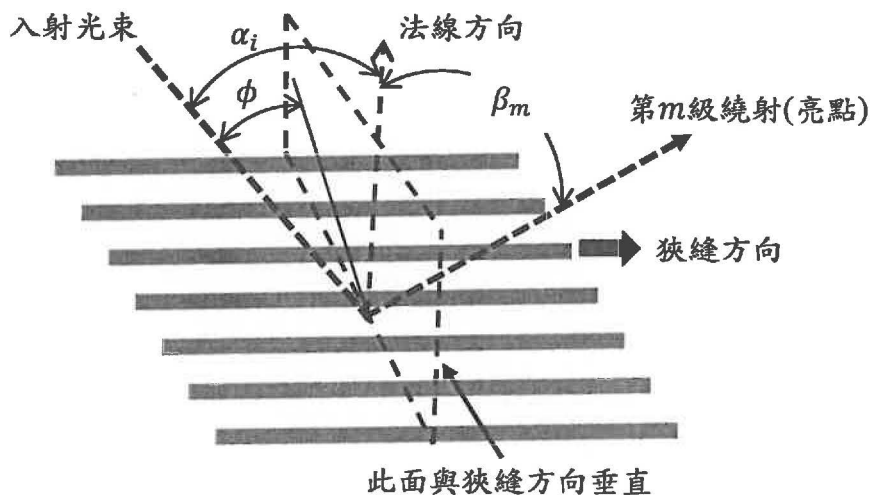


圖 4：入射光束與狹縫方向之間夾一角度 ϕ 照射光柵。

三、奈米管上之帶電質點在磁場中的運動

如圖 5 所示，考慮一個質量為 m 、帶正電荷 q 的質點被限制在半徑為 R_0 的圓柱面上運動，且空間中有均勻磁場 $\mathbf{B} = B\hat{x}$ 。

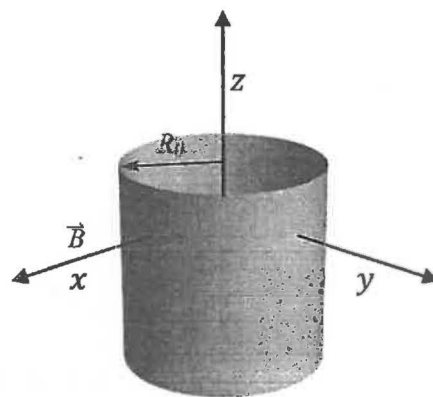


圖 5

- (A) 已知在圓柱座標中， $\hat{e}_s = \cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}$ 、 $\hat{e}_\phi = -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}$ 及 \hat{z} 構成一組右手正交基底。 s, ϕ 其實就是一般的極座標，它們與平面直角座標的關係為 $x = s \cdot \cos\phi$ ， $y = s \cdot \sin\phi$ 。在圓柱座標中，質點的位置可表示為 $\mathbf{r} = R_0\hat{e}_s + z\hat{z}$ 。證明此質點所滿足之牛頓運動方程式，其 ϕ 分量可化簡為：
 $R_0\ddot{\phi} - \omega_c \cos\phi \dot{z} = 0$ ； z 分量則可化簡為：
 $\ddot{z} + \omega_c R_0 \dot{\phi} \cos\phi = 0$ ，其中 $\omega_c = qB/m$ 為此質點在均勻磁場中的迴旋角頻率。(8 分)
- (B) 承(A)小題，已知初始時($t = 0$)， $\phi(t)|_{t=0} = 0$ 、 $\dot{z}(t)|_{t=0} = R_0\omega_z$ ，證明 $\dot{z} + \omega_c R_0 \sin\phi = R_0\omega_z$ 。(3 分)
- (C) 承(A)、(B)小題，已知 $\dot{\phi}(t)|_{t=0} = \omega_\phi$ ，證明 $\dot{\phi}^2 + \omega_c^2 \sin^2\phi - 2\omega_c\omega_z \sin\phi - \omega_\phi^2 = 0$ 。(5 分)
- (D) 承(C)小題，若 ω_z 、 ω_ϕ 皆為定值， ω_c 要滿足什麼條件，質點才能像螺線一樣環繞圓柱運動？(5 分)
- (E) 承(C)小題，若 $\omega_z = 0$ ， ω_ϕ 為定值， ω_c 要滿足什麼條件，質點在圓柱上的運動軌跡才會是一條封閉曲線？(4 分)

四、母球與檯邊的斜向碰撞

如圖 6 所示，在水平撞球檯面上，一質量為 m 、半徑為 R 的剛體均勻母球最初做無滑動的純滾動，斜向以 $\vec{V} = V_x \hat{x} + V_y \hat{y}$ 的平移速度，與光滑無摩擦的檯邊瞬間發生碰撞。已知母球繞通過質心之轉軸的轉動慣量為 $I_C \equiv mk^2$ ，檯邊比檯面高出 $R + h$ ($R > h \geq 0$)。假設檯邊亦為剛體，且母球與檯邊發生彈性碰撞，檯邊在碰撞時只能施給母球水平方向(平行於 xy 平面)的衝力，試回答下列各題。

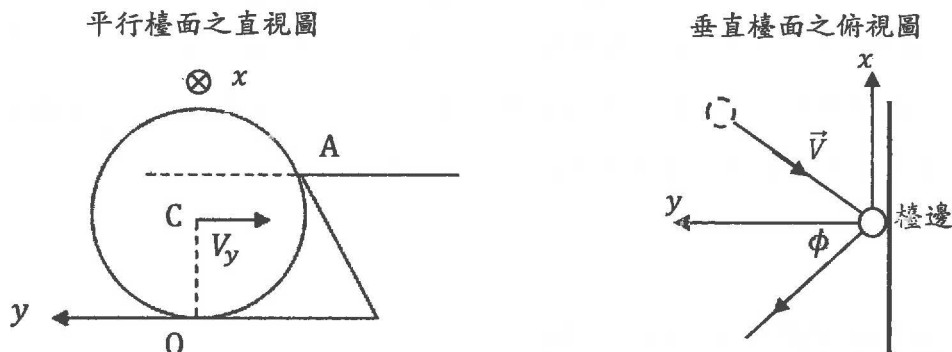


圖 6

- 母球在碰撞前之角速度的分量 ω_x 與 ω_y 各為何？(4 分)
- 若在碰撞時，檯邊施給母球之衝量的分量為 j_x 與 j_y ，則在碰撞後，母球之質心平移速度的分量 V'_x 、 V'_y ，與轉動角速度的分量 ω'_x 、 ω'_y 各為何？(8 分)
- 檯邊施給母球之衝量的分量 j_x 與 j_y 各為何？(8 分)
- 若母球在碰撞後之反射角(即母球平移速度與 y 軸的夾角)為 ϕ ，則 $\tan \phi$ 為何？(5 分)

五、電容器與電感器中的電磁感應

(A) 如圖 7 所示，一電容器由兩半徑為 a 之圓形金屬板組成，金屬板間的距離為 d ，且金屬薄板之厚度可忽略不計，此電容由長直導線自圓心向外連結。今將此電容器中插入一寬度 $a/2$ 為金屬圓環後(此圓環與上、下金屬板之相對位置之側視如圖 8 所示)，此電容器 C 再與一電阻 R 串連如圖 9 所示。

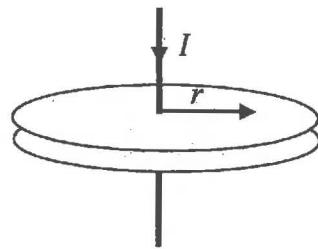


圖 7

在時間 $t = 0$ 時，電容器帶電荷 Q_0 ，開始接通開關 S ，此時假設金屬板邊緣效應所造成電場的變化可不計，且 $d \ll a \ll \frac{c}{\omega}$ (c 為光速)，若空氣可以用真空電容率 ϵ_0 及磁導率 μ_0 描述，且 $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ ，試回答以下問題。

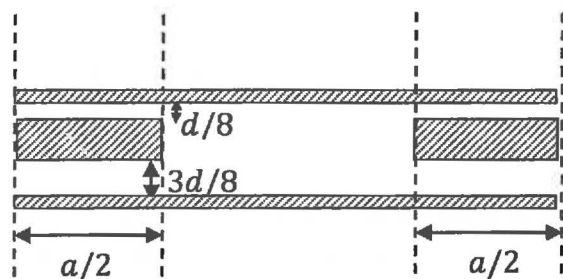


圖 8

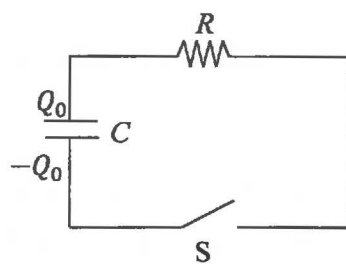


圖 9

- 試求電容器之電容 C 。(3 分)
- 此電路中 t 時刻之電流 $i(t)$ (以流入金屬板為正並以 C 、 R 表示)。(2 分)
- 求 t 時刻上圓形金屬板上、距離圓心 r 處之電流密度(通過單位長度之電流)(以 C 、 R 、 Q_0 表示)。(4 分)
- 試求電容器中距離中心軸 r ($r < a$)、下金屬板上方 z ($z < d$) 處(金屬環外)之感應磁場。並由此求出接通後到最後平衡由電容器流出去之總電磁能。(6 分)

(B) 如圖 10 所示，某生欲將電容器的電量傳到另一個電容器，因此他將圓形金屬板改成邊長為 b 之平行方形金屬板，金屬板間的距離仍為 d ，且金屬薄板之厚度可忽略不計，兩電容器經由兩半徑為 a 之半圓柱形金屬板相連。若在時間 $t = 0$ 時，左電容器帶電荷 Q_0 ，各金屬板上的電流皆為 0。假設金屬板邊緣效應所造成電場的變化可不計，且 $d \ll$

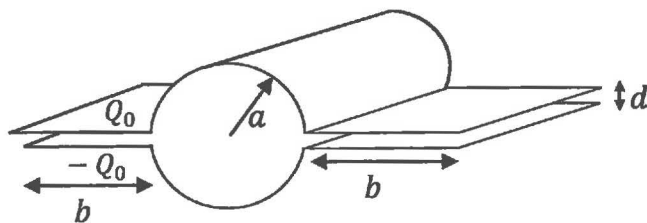


圖 10

$a \ll \frac{c}{\omega}$ ，試估計

- 電荷 Q_0 完全由左電容器轉移到右電容器所需之最小時間，(7 分)
- 單位時間流入圓柱中空腔之電磁能的最大值。(3 分)

六、無線電力傳輸

無線電力傳輸(Wireless Power Transfer, WPT)是指將電磁能藉由電磁效應傳輸到負載裝置的技術，在傳輸能量過程中不使用實體導線。WPT 的概念早於 1890 年就由特斯拉用共振變壓器(resonant transformer)所展示，稱為特斯拉線圈。WPT 近年來被應用於諸如手機、可攜式電腦及電動車中之無線充電裝置。目前短距(約小於 1 公尺) WPT 技術採用電感功率耦合傳輸(Inductive Power Transfer)的方式。本題將討論 WPT 相關的物理機制。考慮如圖 11 的電路：

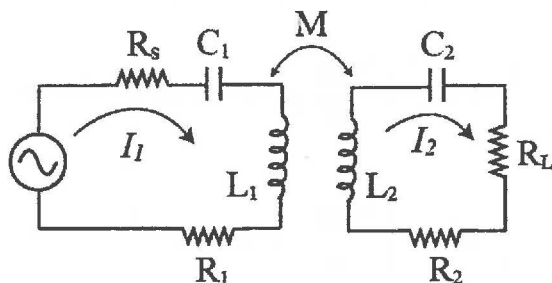


圖 11

圖中 I_1 與 L_1 ， I_2 與 L_2 為輸入端與輸出端中之交流電流與線圈自感，交流頻率 ω 約為 ~ 100 kHz， M 為兩線圈耦合之互感， R_s 為電壓源電阻， R_L 為負載電阻； R_1 與 R_2 為感應線圈之電阻。

(A) 互感 M 可表示為 $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ ，其中 k 代表兩線圈磁通量耦合係數。

證明 $k \leq 1$ 。(5 分)

(B) 考慮當此線圈形成耦合共振時，即 $\omega^2 L_1 C_1 = \omega^2 L_2 C_2 = 1$ ，求出加於負載 R_L 之功率 P_L 與輸入電流 I_1 之關係。(7 分)

(C) 計算此電路之能量轉換效率 $\eta (= P_L / \text{輸入功率})$ 。(5 分)

(D) 若 R_1, R_2, R_s, ω, M 皆為定值，定義參數 $\alpha = R_2(R_1 + R_s) / (\omega M)^2$ ，求 η 之極大值及此時 R_L / R_2 之比值(以 α 表示)。(8 分)

2019年第20屆亞洲物理奧林匹亞競賽 及第50屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊複選考試

理論試題

2019年2月16日

13:30~16:30

考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

- 一、限使用黑色或藍色原子筆作答。
- 二、本試題共有計算題六大題，每題25分，合計150分。
- 三、各計算題請在答案卷上指定之位置作答，每大題答案卷二頁。
- 四、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。

可能用到的數學公式(t 為時間, x 為任意物理量)

1. $f'(x) \equiv \frac{df}{dx}$, $f''(x) \equiv \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$;

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x}{dt^2}.$$

2. $\int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a}$, $m \neq -1$; $\int (ax+b)^{-1} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$;

$$\frac{d}{dx}(ax+b)^m = ma \cdot (ax+b)^{m-1}; \quad \frac{d}{dx} \ln(ax+b) = a \cdot (ax+b)^{-1}.$$

3. $\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}$, $\frac{d \sin ax}{dx} = a \cos ax$, $\frac{d \cos ax}{dx} = -a \sin ax$;

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}, \quad \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax, \quad \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax.$$

4. 當 $|x| \ll 1$, $(1+x)^\alpha \approx 1+ax$,

$$e^x \approx 1+x, \quad \sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}.$$

5. 線性且係數為常數的一階微分方程式 $ax'(t) + bx(t) = 0$, 一般解形式為

$$x(t) = ae^{st}$$

其中 s 是右列一次方程式 $as + b = 0$ 的根,

而 a 是由初始條件 $x(0)$ 決定的積分常數。

6. 線性且係數為常數的二階微分方程式 $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$, 一般解形式為

$$x(t) = \alpha_1 e^{s_1 t} + \alpha_2 e^{s_2 t}$$

其中 s_1, s_2 是右列二次方程式 $as^2 + bs + c = 0$ 的根,

而 α_1, α_2 是由初始條件 $x(0)$ 和 $x'(0)$ 決定的積分常數。

2019年第20屆亞洲物理及第50屆國際物理奧林匹亞競賽 國家代表隊複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

一、熱機

一個由兩個等壓過程和兩個定容(等體積)過程所組成的熱機循環，此熱機是以 1.00 莫耳的雙原子分子理想氣體進行工作，在如圖 1 所示 P - V 圖中的 ABCD 四點間進行循環。已知理想氣體常數 $R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ ，

A 點的壓力及溫度分別為 $P_0 = 1.00 \text{ atm}$ 、 $T_0 = 200 \text{ K}$ ，而 $P_h = 3.00 P_0$ ， $V_h = 2.00 V_0$ 。在不考慮能量損失的情況下，回答下列問題。

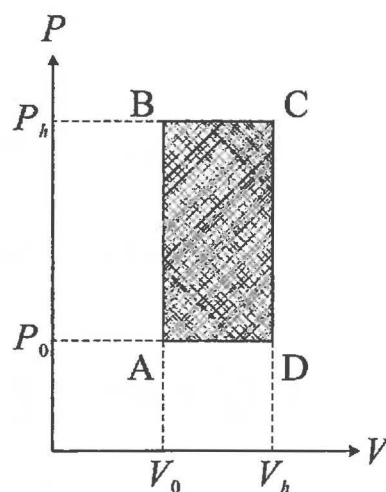


圖 1

(A) 計算此熱機的效率。

(B) 熱機完成一次循環過程所釋放的熱，恰好能使質量為 m 的乾冰在一大氣壓的環境下，自 -100°C 轉變成溫度為 27.0°C 的二氧化碳氣體，問 m 的數值為何？已知在一大氣壓下，乾冰的密度是 1.50 g/cm^3 、相變溫度是 -78.0°C ，比熱是 $55.0 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ 、汽化熱是 290 J/g ，而二氧化碳的比熱則是 $37.0 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ 。

(C) 承(B)，此二氧化碳氣體的體積(V_g)和乾冰的體積(V_{di})的比值 V_g/V_{di} 為何？(將二氧化碳視為理想氣體)

今因工作需求而要改裝此熱機，試問

(D) V_h 要調整為多大，方能使 B 和 D 落在一條等溫線上？

(E) V_h 要調整為多大，方能使 B 和 D 落在一條絕熱線上？

(F) 若 B 與 D 落在一條絕熱線上，將此時 D 點應有的體積稱為 V_{ad} 。在實務上當 V_{ad}

和 V_h 的差異 $\left(\frac{|V_h - V_{ad}|}{V_h}\right) \leq 5\%$ ，我們就可以把 V_h 視為 V_{ad} ，而不須調整 V_h 的大小。那

麼前一小題所對應到的情況是否能符合此實務條件？若將此熱機的工作氣體更換為單原子理想氣體，是否能夠符合此實務條件？

二、脈衝雷射

特定波長的光會在雷射腔體中產生駐波，腔體如圖 2 之示意圖所示，其長度為 L 。腔體中央有一長度為 d 的增益介質(另有一系統提供此介質能量讓光強度增強，因為與題目無關故不列出)，當光經過此增益介質時，光的強度會略微增加，因而輸出雷射光。腔體兩端有兩個平行的反射鏡(忽略其厚度)，類似一個法布立-培若共振腔，可以百分之百反射雷射光。

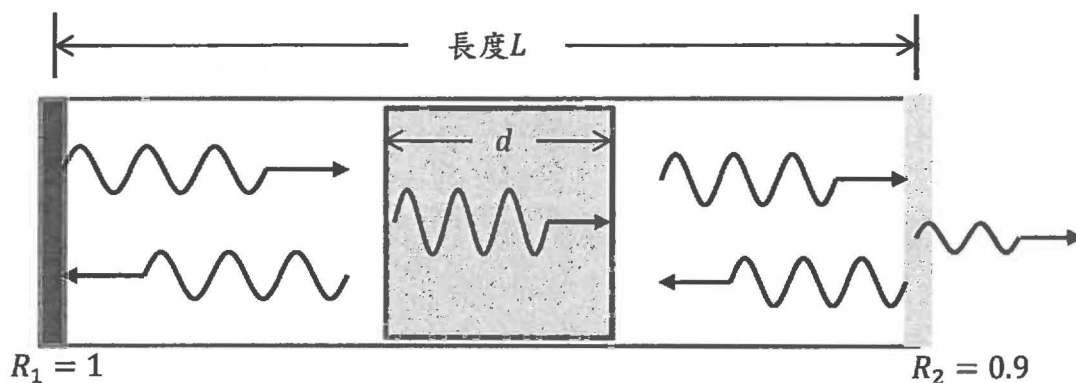


圖 2：雷射共振腔示意圖

(A) 已知增益介質的折射率為 n ，則可以在共振腔中傳播之光波頻率 ν 可以寫為 $\nu = m \times \nu_0$ ，其中 m 為正整數，求 ν_0 的表示式。

已知在共振腔中的光為平面波，且當光經過增益介質時，會產生增強作用。為簡化計算過程，假設增益介質的總增益效果(已扣除相關損失後)如圖 3 所示，增益介質在方格範圍內發光強度都相同，亦即增益介質可以發出 $f_0 - \Delta f/2$ 到 $f_0 + \Delta f/2$ 的光，且增益效果都相同。已知 $f_0 = 2 \times 10^{15} \text{ Hz}$ ，而頻寬 Δf 為 $5 \times 10^{12} \text{ Hz}$ 。

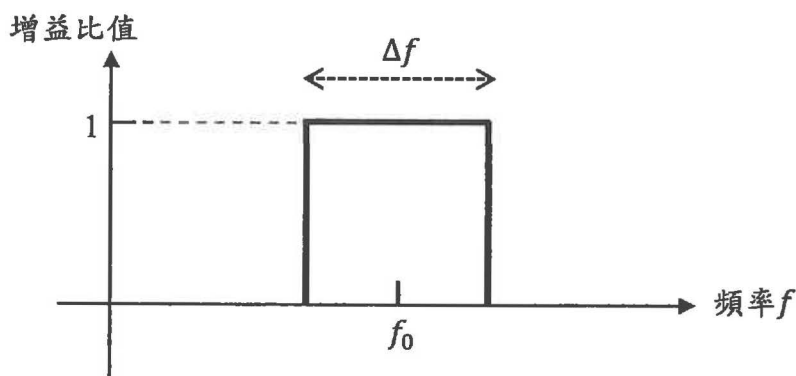


圖 3

(B) 若增益介質的折射率 $n = 1.5$ ，長度 d 為 50 cm ；而雷射共振腔的長度為

$L = 100\text{cm}$ ，則可以在此共振腔內存在的共振模之數目為何？

- (C) 設每個共振模的強度為 I_0 ，則當共振腔中的共振模都產生建設性干涉時會造成脈衝光，也就是如閃光燈一般，只是雷射脈衝光是在很短時間光強度十分強，此現象稱之為”模鎖定”(Mode-Locking)，此時光強度 $I_t(t)$ 隨時間的變化為何？
- (D) 由(C)的結果，求模鎖定时相鄰兩個脈衝光的時間差為何？
- (E) 由(C)的結果，求模鎖定时此脈衝光的時域寬度，也就是此脈衝光在時間軸上的寬度。

三、電子在氣體中的游離效應

一個電荷為 $-e$ 的電子，在處於強電場下的氣體中會被加速，其動能因而可大到足以使被它撞擊的氣體分子A游離，以致分解成為一個正離子 A^+ 與一個電子 e^- 。本題所考慮之電子的游離效應，將只限於上述 $A \rightarrow A^+ + e^-$ 的類型，並假設電子與離子的復合可忽略。以下利用簡單的模型，以探討系統達到穩定態時，電子在氣體中的游離效應，這在充氣電離輻射偵測器中是一個相當基本而重要的課題。

如下圖所示，假設兩片平行板電極相距為 d ，平行板之間的強電場是均勻且為定值，而空間充滿由中性分子組成的氣體，氣體溫度固定為 T 。電位較低的負極板位於 $x = 0$ ，正極板則位於 $x = d$ 。當每個電子在氣體中行進時，每單位長度產生的游離電子數以常數 α 代表，此常數稱為第一 Townsend 係數。

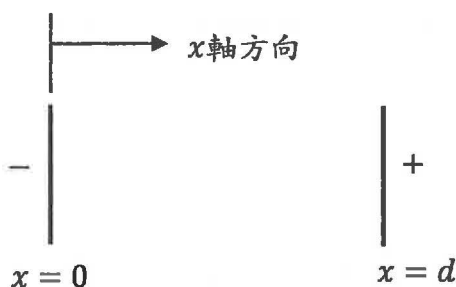


圖 4

- (A) 以紫外線均勻照射負極板(位於 $x = 0$)，使其沿 x 軸方向每單位時間發射的自由電子數為 n_0 ，這些電子在氣體中沿 x 軸方向往正極板前進，而與氣體分子發生游離碰撞。假設電場不受電子與離子的影響，並忽略離子的游離效應，電子的第一 Townsend 係數為 α ，試求每單位時間到達正極板(位於 $x = d$)的電子總數 n_d 。
- (B) 承上題。由於實驗發現當 αd 的值較大時，每單位時間到達正極板的電子總數，高於上題預測的值，因此有人認為電子與分子發生游離碰撞所產生之正離子(數目等於游離的電子數)會往負極移動，被電場加速後，亦能使氣體分子游離而產生電子。假設以常數 β 代表每個正離子前進時每單位長度產生的游離電子數，並將前小題(A)的模型推廣，以包括電子與正離子的游離效應，則每單位時間到達正極板的電子總數 N_d 為何？
- (C) 今考慮產生初級電子的另一種不同方式：假設兩電極板間的氣體，其各部分均勻受到外部輻射源的照射，以致氣體分子被游離，在每單位時間內，每單位體積產生的初級電子(與離子)數目為 ν 。假設各電子的第一 Townsend 係數仍為 α ，且只考慮電子(而不考慮離子)的游離作用(此處所指的電子包括來自上述氣體各部分的初級電子，以及它們與分子碰撞所產生的次級與後續更為次級的游離電子)，則流經兩極板間氣體的電流密度 J 為何？

四、細鐵條的運動

如圖 5 所示，有一支均勻細鐵條直立於水平地面上，細鐵條長度為 $2L$ ，質量 M ，鐵條相對於其質心的轉動慣量 $I = ML^2/3$ 。如果在頂端施以極微小的水平力量，使得細鐵條失去平衡，持續向下傾倒，如圖 6 所示。

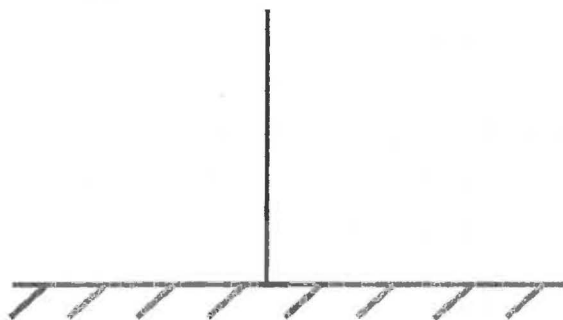


圖 5

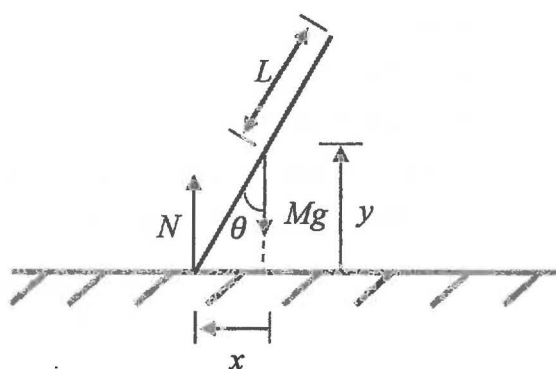


圖 6

若鐵條與地面之間無摩擦力，試回答下列問題：

- (A) 細鐵條在傾斜過程中之角速度 $\dot{\theta}$ 與角度 θ 的關係式，並求落地前瞬間的角速度。
- (B) 細鐵條之質心在垂直方向之速度 \dot{y} 與角度 θ 關係式，並求落地前瞬間的垂直速度。
- (C) 細鐵條下端之水平速度 \dot{x} 與角度 θ 關係式，並大略畫出細鐵條的底端速度 \dot{x} 與角度 θ 的關係圖。
- (D) 細鐵條底端受到的正向力 N 與角度 θ 關係式，並求落地前瞬間的正向力。

若鐵條與地面之間的靜摩擦力係數為 μ ，而其它條件維持不變，試回答下列問題：

- (E) 當 $\theta = \theta_0$ 時，細鐵條下端會開始滑動，求 θ_0 所滿足的方程式。
- (F) 承(E)小題，若 $\mu \ll 1$ ，求 θ_0 。

五、帶電質點在靜電場中的運動

如圖 7 所示，有一固定於 z 軸上、帶均勻電荷之細棒，長度為 $2a$ ，總電荷為 $Q(>0)$ 。帶電細棒附近有一質點，其質量為 m 、電荷為 $-q(<0)$ 。質點受帶電細棒的靜電力作用而運動。

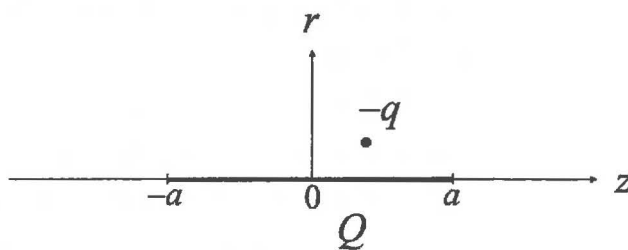


圖 7

(A) 證明此點電荷的角動量的 z 分量守恆。

(B) 若點電荷在 $z=0$ 的平面上繞著帶電細棒作半徑為 r_0 的圓周運動。試求此圓周運動的角頻率 ω_0 。

(C) 承 (B) 小題，若此質點的圓周運動在徑向上受到一微擾，則此質點在 r 方向的位置會變成 $r = r_0(1 + \epsilon \sin \omega t)$ 。試求 ω 與 ω_0 的關係。

(D) 承 (C) 小題，受到上述微擾，此質點的角速度會變成 $\dot{\theta} = \omega_0(1 - \epsilon \alpha_0 \sin \omega t)$ ，試求 α_0 。

提示： $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+b^2}} dx = \ln(|\sqrt{x^2+b^2}+x|) + C$ ，

$$\int \frac{1}{(x^2+b^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{b^2\sqrt{x^2+b^2}} + C。$$

六、石英振盪器

石英震盪器和濾波器。壓電石英晶體在電子電路的主要應用之一，為控制振盪器與濾波器的頻率。如圖 8(a) 所示，在一經適當切割的石英晶體薄板兩面鍍上金屬電極，並將其接上一個交流電源，此時因壓電效應可使晶體內產生一力學波。設此力學波波長為 λ ，而該晶體沿著波行進方向的長度為 l ，當兩者滿足共振條件： $n(\lambda/2) = l$ （其中 n 為正整數）時，該力學波即可在晶體內形成一駐波，其頻率 $f_s = v/\lambda$ ， v 為該力學波在介質中的傳播速度。由於交流電經由壓電效應激發石英的力學振動，其行為類似於由交流電源驅動的串聯電感-電容-電阻(LCR)電路，如圖 8(b) 右側的等效電路所示。在此等效 LCR 電路中， L 、 C 和 R 分別對應到石英晶體的質量、剛性、和力學損耗（或阻尼）。此外，由於石英片的兩面均鍍有金屬電極，故可將之視為一個平行板電容 C_0 ， C_0 與前述的等效 LCR 電路並聯，如圖 8(b) 左側的等效電路所示。典型石英振盪器的阻抗除了在力學振動的共振頻率 f_s 處有一最小值外，另因等效電感 L 與二等效電容 (C 和 C_0) 間的共振，石英振盪器在另一頻率 f_a 處（稱為反共振頻率，anti-resonant frequency），會出現一阻抗極大值，如圖 8(c) 所示。根據以上所述，試回答下列問題。

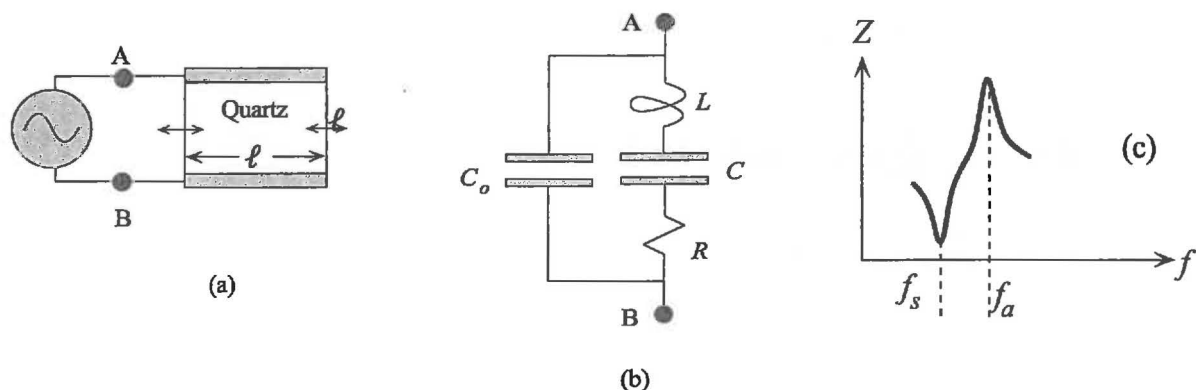


圖 8

- (A) 試從上述石英振盪器特性，計算 f_s 和 f_a ，以圖中的參數 L 、 C 、 C_0 等表示。
- (B) 已知石英的楊氏模數 $Y = 80.0 \text{ GPa}$ ，密度 $\rho = 2.65 \text{ g/cm}^3$ 。試問適合用於 1.00 MHz 的石英震盪器之長度大約為何？（假設該駐波為 $n = 1$ 的基頻駐波。）
- (C) 壓電材料的耦合係數(coupling coefficient) κ 可定義為：

$$\kappa^2 \equiv \frac{\text{系統儲存的力學能}}{\text{系統儲存的全部能量}}, \text{ 試證明: } \kappa^2 = 1 - \frac{f_s^2}{f_a^2}.$$

- (D) 一典型 X-cut 石英晶體， $\kappa = 0.100$ 。若已知 $f_s = 1.00 \text{ MHz}$ ， $C_0 = 5.00 \text{ pF}$ ， $R = 20.0 \Omega$ ，試求該石英晶體的等效電感 L 及電容 C 。
- (E) 承(D)，已知石英振盪器的品質因子(quality factor) Q 可表示為：

$$Q = \frac{1}{2\pi f_s R C}, \text{ 試計算該石英振盪器的品質因子。}$$

2020年第21屆亞洲物理奧林匹亞競賽 及第51屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊複選考試

理論試題

2020年2月22日

13:30~16:30

考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

- 一、限使用黑色或藍色原子筆作答。
- 二、本試題共有計算題六大題，每題25分，合計150分。
- 三、各計算題請在答案卷上指定之位置作答，每大題答案卷二頁。
- 四、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。

可能用到的數學公式(t 為時間, x 為任意物理量)

1. $f'(x) \equiv \frac{df}{dx}$, $f''(x) \equiv \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$;

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x}{dt^2}.$$

2. $\int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a}$, $m \neq -1$; $\int (ax+b)^{-1} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$;

$$\frac{d}{dx}(ax+b)^m = ma \cdot (ax+b)^{m-1}; \quad \frac{d}{dx} \ln(ax+b) = a \cdot (ax+b)^{-1}.$$

3. $\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}$, $\frac{d \sin ax}{dx} = a \cos ax$, $\frac{d \cos ax}{dx} = -a \sin ax$;

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}, \quad \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax, \quad \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax.$$

4. 當 $|x| \ll 1$, $(1+x)^a \approx 1+ax$,

$$e^x \approx 1+x, \quad \sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}.$$

5. 線性、常係數、齊次一階微分方程式 $ax'(t) + bx(t) = 0$

的一般解形式為 $x(t) = ae^{st}$,

其中 s 是右列一次方程式 $as + b = 0$ 的根,

而 a 是積分常數, 可由初始條件 $x(0)$ 決定。

6. 線性、常係數、齊次二階微分方程式 $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$

的一般解形式為 $x(t) = \alpha_1 e^{s_1 t} + \alpha_2 e^{s_2 t}$,

其中 s_1, s_2 是右列二次方程式 $as^2 + bs + c = 0$ 的根,

而 α_1, α_2 是積分常數, 可由初始條件 $x(0), x'(0)$ 決定。

2020年第21屆亞洲物理及第51屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

一、內燃機

- (A) 奧圖(Otto)引擎為內燃機常見的型態。其運轉步驟如圖 1 所示。1→2 與 3→4 為絕熱過程，2→3 與 4→1 為等體積過程。試求奧圖引擎之效率 e_O 。
- (B) 阿特金森(Atkinson)引擎乃由奧圖引擎改良而來，近年來越來越常裝置於私家客車上。其標準運轉步驟如圖 2 所示。1→2 與 3→4 為絕熱過程，2→3 為等體積過程，而 4→1 近似等壓過程。阿特金森引擎基本構想為，與奧圖引擎相較，藉降低壓縮比 $r_C = V_2/V_1$ 來減少燃燒油氣量，但仍享有同樣的對外作功膨脹比 $r_E = V_4/V_3$ 。試求阿特金森引擎之效率 e_A 。
- (C) 比較 r_C 相同（燃燒等量燃料）的奧圖引擎與阿特金森引擎。試定量比較兩個引擎的效率，何者效率較高？

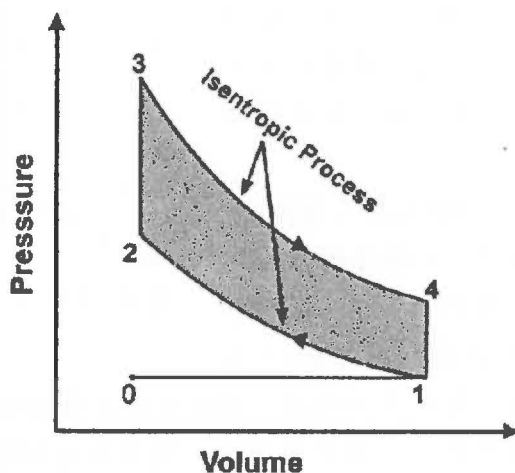


圖 1 奧圖(Otto)引擎

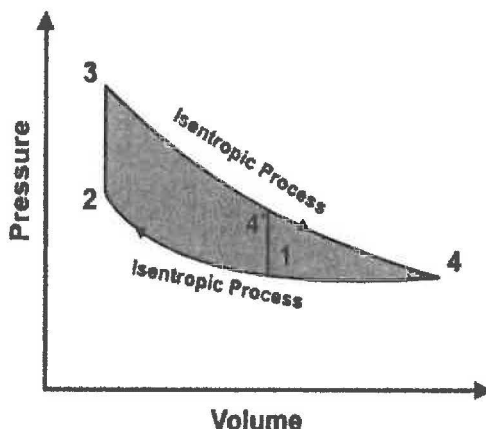


圖 2 阿特金森(Atkinson)引擎

二、法布立-培若干涉儀

法布立-培若干涉儀 (Fabry-Pérot interferometer) 中包含兩片平行的薄玻璃片 (玻璃片的厚度可忽略)，其中兩塊玻璃片相對的內表面都具有高反射率。如圖 3 所示，當光以傾斜角 θ 入射此干涉儀時，由於光波在兩玻璃片中多次反射，使得透射光在遠方的屏幕上形成同心圓的干涉條紋。設兩玻璃片的間距為 t ，屏幕與干涉儀的距離為 L ，入射光波長為 λ ，試回答以下問題。

(A) 請計算建設性干涉的條件。

(B) 算自中心點向外第 p 道干涉條紋的半徑。

(C) 若將這兩塊間距為 t 的平行薄玻璃片換成厚度 t 、折射率 μ 的透明物體，這樣的系統稱為法布立-培若標準具 (Fabry-Pérot etalon)，如圖 4 所示。試問此時建設性干涉的條件、第 p 級干涉條紋的半徑分別為何？

(D) 承(B)，我們可以透過調整玻璃片間距 t ，來辨識細微的波長差異，而測得精密的光譜。當入射光波長為 650 nm ，玻璃板間距為 2 cm ，屏幕與干涉儀的距離為 1 m ，且恰在屏幕上形成的同心圓的干涉條紋。若利用精密螺旋將玻璃間距調整 $\Delta t = 2 \mu\text{m}$ 後，在相同的位置再次觀察到同心圓干涉條紋，試計算這個情況下形成干涉的光波長。

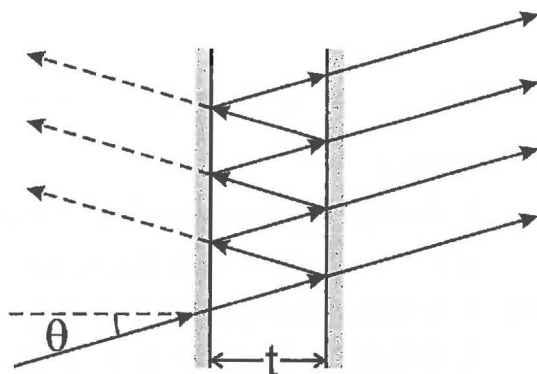


圖 3 法布立-培若干涉儀示意圖

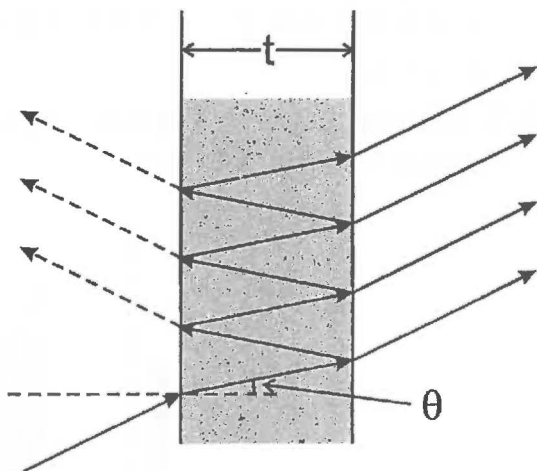


圖 4 法布立-培若標準具示意圖

三、鏡像法

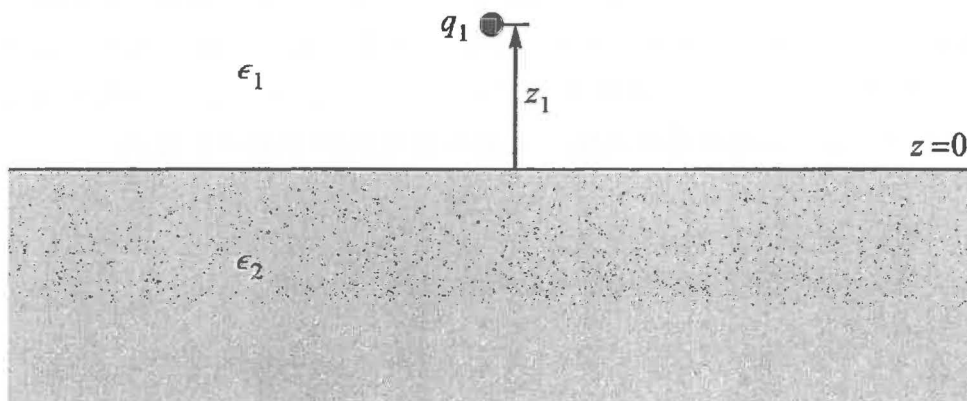


圖 5

如圖 5 所示，考慮位於 $\mathbf{r}_a = z_a \hat{\mathbf{z}}$ ($z_a > 0$) 的點電荷 q_a 。若已知靜電場 \mathbf{E} 在介質的邊界上必須滿足兩個邊界條件：(i) \mathbf{E} 的切向分量連續；(ii) $\epsilon \mathbf{E}$ 的法向分量連續。由鏡像法我們預期在 $z \geq 0$ 區域的電場會是由原電荷與位於 \mathbf{r}'_a 處的鏡像電荷 q'_a 疊加而成；而在 $z < 0$ 區域的電場則會是由位於 \mathbf{r}''_a 處的等效電荷 q''_a 所產生，即

$$\mathbf{E}_a = \begin{cases} \frac{q_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)}{4\pi\epsilon_1|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|^3} + \frac{q'_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}'_a)}{4\pi\epsilon_1|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_a|^3}, & z \geq 0; \\ \frac{q''_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}''_a)}{4\pi\epsilon_2|\mathbf{r}-\mathbf{r}''_a|^3}, & z < 0. \end{cases}$$

(A) 證明 $q'_a = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q_a$ ， $q''_a = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q_a$ ， $\mathbf{r}'_a = -z_a \hat{\mathbf{z}}$ ， $\mathbf{r}''_a = z_a \hat{\mathbf{z}}$ 。

(B) 求電荷 q_a 所受到來自介電質 2 的作用力 \mathbf{F}_a ，及由 \mathbf{F}_a 所導致的電位能 V_a 。

(C) 由電磁學知：電場 \mathbf{E} 在介質中的能量密度為 $\frac{1}{2} \epsilon E^2$ 。利用這個觀念計算這個系統的能量，並與(B)小題的結果做比較。

(D) 若有另一個位於 $\mathbf{r}_b = x_b \hat{\mathbf{x}} + z_b \hat{\mathbf{z}}$ 的點電荷 q_b ，且 $z_b < 0$ ，求 q_a 所受到來自 q_b 的作用力 \mathbf{F}_{ab} ，及 \mathbf{F}_{ab} 對應的電位能 V_{ab} 。

(E) 承(D)小題，若 $z_b > 0$ ，且 $\mathbf{r}_a \neq \mathbf{r}_b$ 。求 q_a 所受到來自 q_b 的作用力 \mathbf{F}_{ab} ，及 \mathbf{F}_{ab} 對應的電位能 V_{ab} 。

四、彈跳的旋轉球

在各式的球類運動中常常可觀察到旋轉的球在擊打或碰撞後，其運動軌跡變得更為多樣。本題主要在探索一個旋轉球在碰撞後的彈跳行為。如圖 6 所示，球的質量為 M ，轉動慣量為 $I = \alpha MR^2$ ，此處 R 為球的半徑， α 為一參數，碰撞面為 x - z 面，球的入射速度 $\vec{v}_1 = v_{1x}\hat{x} + v_{1y}\hat{y}$ ，轉動角速度為 $\vec{\omega}_1$ ；碰撞後球的速度 $\vec{v}_2 = v_{2x}\hat{x} + v_{2y}\hat{y}$ ，轉動角速度為 $\vec{\omega}_2$ ， $\vec{\omega}_1 = \omega_1\hat{z}$ 、 $\vec{\omega}_2 = \omega_2\hat{z}$ ， f_s 為靜摩擦係數。為簡化問題我們考慮以下情況：

- (1) 忽略球所受的空氣阻力與重力，
- (2) 碰撞過程為彈性碰撞（動能守恒），
- (3) 碰撞點 O 固定不動（即球體與地面為絕對粗糙），
- (4) 垂直碰撞面的速度 $v_{1y} = -v_{2y}$ 。

回答以下問題：

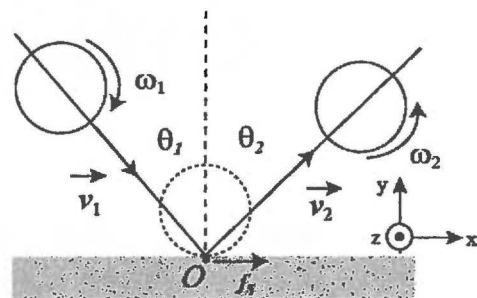


圖 6 彈跳的旋轉球

- (A) 碰撞後的速度為 v_{2x} 與角速度為 ω_2 可以表為
$$\begin{cases} v_{2x} = av_{1x} + b(R\omega_1) \\ R\omega_2 = cv_{1x} + d(R\omega_1) \end{cases} \quad (1)$$

求參數 a, b, c ，與 d 。

- (B) 考慮圖 7(a) 的情況，入射角 $\theta_1 = 45^\circ$ ， $\omega_1 = 0$ （無旋轉），球為一空心球， $\alpha = 1/3$ ，求 v_{2x}/v_{1x} 與 θ_2 。

- (C) 考慮圖 7(b) 的情況，碰撞後角度為 $\theta_2 = 0^\circ$ ，求 ω_2/ω_1 與 $R\omega_1/v_{1x}$ 。

- (D) 考慮圖 7(c) 的情況，球在兩點間彈跳，求 v_{2x}/v_{1x} ， ω_2/ω_1 與 $R\omega_1/v_{1x}$ 。

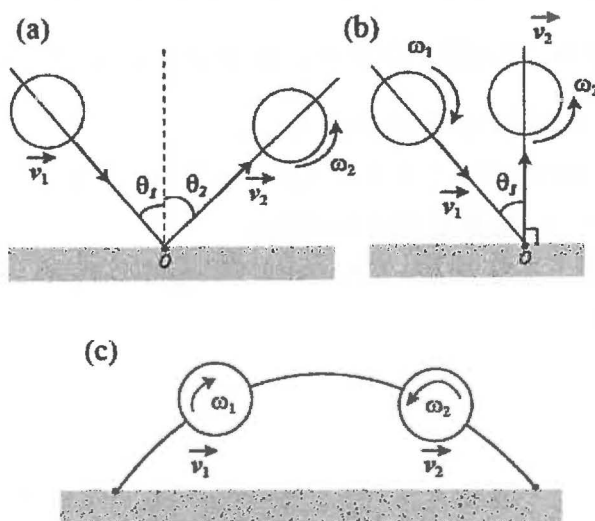
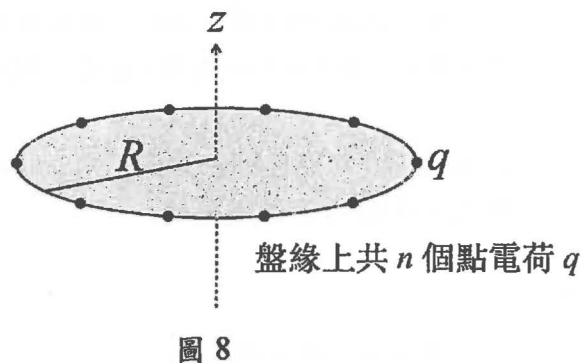


圖 7

五、帶電圓盤在靜磁場中的運動

如圖 8 所示，有一質量為 M 、半徑為 R 的均質絕緣圓盤，盤緣上等間距黏上 n 個點電荷 q ，點電荷質量可忽略不計。圓盤置於一固定的外加磁場 B 中（假設此磁場由一距離很遠的永久磁鐵提供）。將圓盤軸心令為 z 軸。已知外加磁場對 z 軸具有圓柱對稱性（意即磁場在圓柱座標中只為 r 與 z 的函數，且只有 r 與 z 分量，其中 r 為對軸心的距離），且磁場的 z 分量為 $B_z = B_0 + B_1 z$ 。初始時，此圓盤以角速度 $\omega_0 \hat{z}$ 旋轉，並可自由移動。（假設並無任何微擾力矩造成圓盤傾斜，且電荷運動所造成的磁場遠小於外加磁場，故可忽略。）



(A) 試求出此外加磁場的 r 分量 B_r 對位置的函數。

(B) 試求出當圓盤角速度為 $\omega \hat{z}$ 、圓盤質心線速度為 $\dot{z} \hat{z}$ 時，磁場施加於圓盤邊緣上任一點電荷的磁力（以 \hat{r} 、 $\hat{\phi}$ 、 \hat{z} 表示，其中 $\hat{\phi}$ 為沿切線方向的單位向量）。

(C) 試寫下此帶電圓盤的運動方程式，進而求出

- i. 此圓盤在 z 軸上的位置對時間的函數。（設初始位置 $z = 0$ 。）
- ii. 此圓盤角速率對時間的函數。

(D) 試依下列步驟分析此系統之能量。

- i. 請求出此圓盤系統質心動能之時變率。（可用 \dot{z} 表示。）
- ii. 勞倫茲力顯示：運動中的電荷所受磁力方向與電荷速度垂直，故磁力必不作功。但上述(i)小題的答案不為零，故質心每單位時間所獲之動能應來自系統另一部份所損失的功率。試分析此圓盤系統相對於質心的動能，以詮釋此系統之能量守恆。

提示：圓盤相對於軸心的轉動慣量為 $MR^2/2$ 。

六、動線圈麥克風的斷路響應

- (A) 一個阻尼諧振子的質量為 m 、阻力常數為 b 、力常數為 k ，在外力 $F_0 \cos \omega t$ 的驅動下，其位移 x 、速度 \dot{x} 與加速度 \ddot{x} 滿足下列關係式：

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (1)$$

上式與 LRC 串聯電路在電動勢 $V_0 \cos \omega t$ 驅動下，其電容器上電荷 $Q(t)$ 所滿足的微分方程式，在形式上是類似的：

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = V_0 \cos \omega t \quad (2)$$

上二式中的 ω 為角頻率。

因此，仿照 LRC 電路的電阻 R 、電抗 X 、電阻抗 Z ，我們也可以定義用於分析力學振盪器的力學阻 R' 、力學抗 X' 、力學阻抗 Z' 。(注：力學阻、力學抗也簡稱為力阻、力抗。) 試利用(1)、(2)兩式的類似性，給出上述諧振子運動的 R' 、 X' 、 Z' 。

- (B) 考慮如圖 9 所示、在外力 $F(t) = F_0 \cos \omega t$ 作用下做直線運動的質點-理想彈簧系統：在圖 9 中的外力 F ，作用於力常數為 k 的彈簧末端，且作用點以速度 v 向右運動，以致質量 m 的質點以速度 v_m 運動。

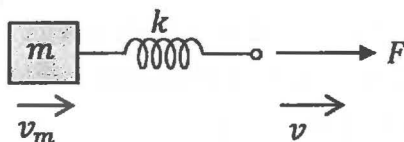


圖 9

就圖 9 所示系統，試畫出可用以分析運動速度 v 的等效電路圖，並於圖上標示出各等效電路元件所對應的力學物理量，以之解出質點速度 v_m 。

- (C) 一個動線圈麥克風的截面圖(下方開管以外的部分具圓柱對稱性)如圖 10 所示：

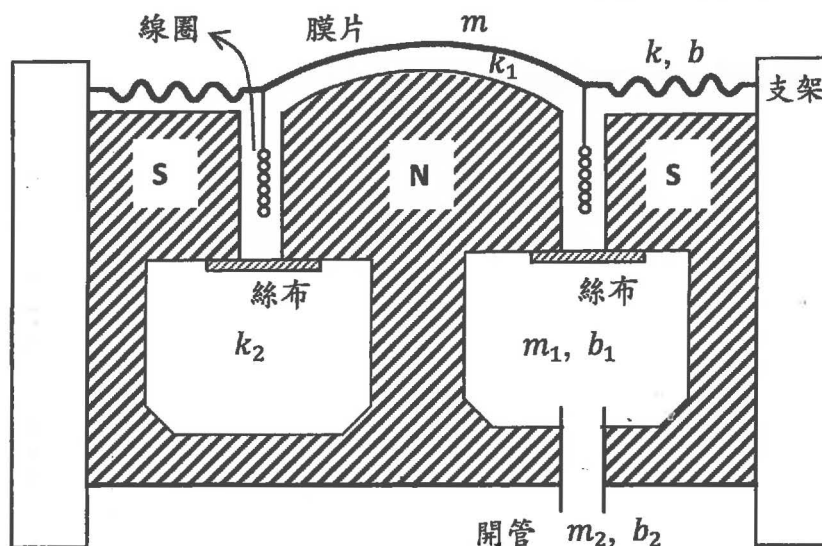


圖 10

此麥克風的工作用原理如下：質量為 m 之拱形膜片，在聲波壓力 P 的推動下會振動，使得固定於膜片的線圈，在靜止磁鐵的水平徑向磁場 B 中運動，產生感應電動勢 \mathcal{E} ，而成為輸出信號。

如圖 10 所示，振動膜片在周邊以表面呈波狀的環帶支撐，並連接到磁鐵固定支架上，環帶的力常數為 k ，阻力常數為 b ；力常數 k_1 主要來自膜片下方空腔內受壓縮的空氣，而質量 m_1 與阻力常數 b_1 主要來自通過絲布中毛細管孔的空氣；力常數 k_2 、質量 m_2 與阻力常數 b_2 都相當小，主要來自絲布下方空腔內的空氣，可以忽略。

圖 11 為動線圈麥克風的力學類比：

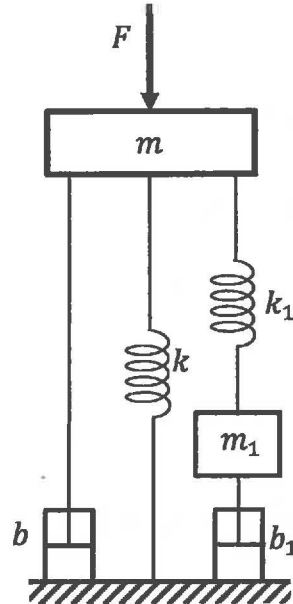


圖 11

試畫出圖 11 所示阻尼振盪系統的等效電路(忽略重力)，並於圖上標示出各等效電路元件所對應的力學物理量。

假設聲波振動的角頻率為 ω ，試利用等效電路，求出無輸出電流時(即斷路時)麥克風的複數阻抗 Z (複數相量以正體符號表示)。

已知聲壓的振幅為 P ，拱形膜片的截面積為 A ，線圈在磁場中的導線總長為 l ，則此麥克風在無輸出下的斷路響應 $M_D \equiv \mathcal{E}/P$ 為何？

2021年第21屆亞洲物理奧林匹亞競賽 及第51屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊複選考試

理論試題

2021 年 1 月 30 日

13：30~16：30

考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

- 一、限使用黑色或藍色原子筆作答。
- 二、本試題共有計算題六大題，每題25分，合計150分。
- 三、各計算題請在答案卷上指定頁面的正面作答，每大題答案卷二或三頁。
- 四、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。

可能用到的數學公式(t 為時間, x 為任意物理量)

$$1. f'(x) \equiv \frac{df}{dx}, \quad f''(x) \equiv \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right);$$

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x}{dt^2}.$$

$$2. \frac{d}{dx}(ax+b)^m = ma \cdot (ax+b)^{m-1}; \quad \frac{d}{dx} \ln(ax+b) = a \cdot (ax+b)^{-1};$$

$$\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}; \quad \frac{d \sin(ax)}{dx} = a \cos(ax); \quad \frac{d \cos(ax)}{dx} = -a \sin(ax)$$

$$3. \int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a} + C, \quad m \neq -1; \quad \int (ax+b)^{-1} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C;$$

$$\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C; \quad \int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + C,$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C; \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C. \quad (\text{在此, } C \text{ 為一個常數})$$

$$4. \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$5. \text{當 } |x| \ll 1, \quad (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x,$$

$$e^x \approx 1 + x, \quad \sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}.$$

2021年第21屆亞洲物理及第51屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

一、科氏力與壓力氣旋

氣旋和柯氏力相關，因此在地球表面北半球和南半球所造成的氣旋會有不同。

(A) 一長度為 1 的單位向量 \hat{a} 繞一固定轉軸 \vec{n} 以角速度 $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$ 旋轉， ω 為一個常數，

如下圖 1。求 \hat{a} 隨時間的變化率 $\frac{d\hat{a}}{dt}$ 。

(B) 質量為 m 的質點在地球表面的緯度 λ 位置，以速度 \vec{v} 在地球表面運動，如下圖 2。

已知地球以等角速度 Ω 自轉(方向向北)，地球的中心到質點的位置向量為 $\vec{r} =$

$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$) 為以地球中心為原點的慣性座標系，如圖 2 所示，且 $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ 。

而隨著地球自轉觀察質點位置為 $\vec{r}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'$, ($\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$) 為以地球中心

為原點，隨地球轉動的座標系，且此坐標系觀察到的速度為 $\vec{v}_R \equiv \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' +$

$\frac{dz'}{dt}\hat{k}'$ ，則觀測此質點所受的力 $\vec{F}_R \equiv m(\frac{d^2x'}{dt^2}\hat{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\hat{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\hat{k}')$ 為何？(以 \vec{v} ,

$\vec{v}_R, \vec{r}, \vec{\Omega}$ 表示)

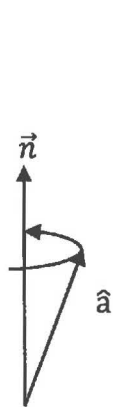


圖 1

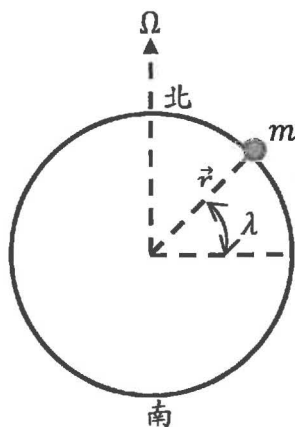


圖 2



圖 3

(C) 已知有一氣旋在緯度為 λ 的地方，且距離壓力中心 ℓ 位置的壓力為 P ，且該位置附

近的壓力梯度 ($\lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta P}{\Delta \ell} \right| = \left| \frac{dP}{d\ell} \right|$) 和空氣的密度 ρ 均為定值，如上圖 3。因為地球自

轉的 Ω 很小，所以 $\Omega \gg \Omega^2$ (可忽略 Ω^2)。由(B)的結果，求低壓中心與高壓中心，在地球表面與中心切線水平方向吹向北方的風速 v_R 。

二、小球在半球面上的運動

如圖 4 所示，在均勻重力場下($\vec{g} = -g\hat{y}$)，一個質量為 m 、半徑為 r_0 的均勻小球在一個半徑為 R_0 ，且固定於桌面上的半圓球面上之運動。初始時，小球在重力作用下以幾乎為零的初速自半球的頂點開始運動。已知小球繞其質心轉動慣量為 $\frac{2}{5}mr_0^2$ ，

角度 θ 是自半球頂端算起， ψ 是指小球轉動的角度。

- (A) 若 $r_0 \ll R_0$ ，且小球與半球面間的摩擦力可忽略不計，求半球作用在小球的正向力量值。已知小球在 $\theta = \theta_0$ 時會開始離開半球，則 $\cos \theta_0$ 的量值為何？
- (B) 若 $r_0 \ll R_0$ ，而小球與半球面間的摩擦力不可以忽略，且小球在半球面上作純滾動，求半球作用在小球的正向力量值。已知小球在 $\theta = \theta_1$ 時會開始離開半球，求 $\cos \theta_1$ 的量值為何？並比較 θ_0 、 θ_1 的大小關係。
- (C) 若 $r_0 \ll R_0$ ，且小球與半球面間的靜摩擦係數為 μ_s ，當 $\theta \leq \theta_2$ 時，小球在半球面上作純滾動，若 $\mu_s \leq 1$ ，比較 θ_1 、 θ_2 的大小關係。
- (D) 若 r_0 並非遠小於 R_0 ，且小球與半球面間的靜摩擦係數為 μ_s 。當 $\theta \leq \theta_3$ 時，小球在半球面上作純滾動，比較 θ_2 、 θ_3 的大小關係。
- (E) 承(D)小題，且小球與半球面間的動摩擦係數為 μ_k 。若定義小球恰好要開始滑動的時刻為 T_0 ，求 $\theta(T_0)$ 及 $\dot{\theta}(T_0)$ ，以 θ_3, g, R_0, r_0 表示之。當 $\theta > \theta_3$ 時，小球開始滑動。列出此時 θ 所滿足的微分方程式。若小球繞其質心轉動的角速度為 $\dot{\psi}$ ，列出 ψ 所滿足的運動方程式。

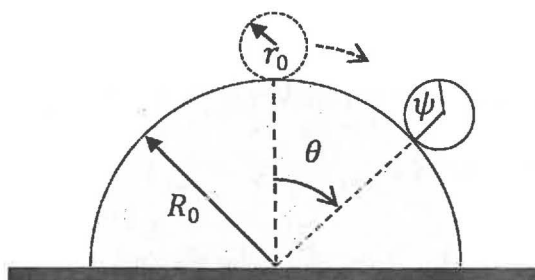


圖 4

三、全反射時的衰減波

衰減波 (evanescent wave) 是指當光波從光密介質入射到光疏介質時，當發生全反射時，在光疏介質一側會產生的一種波。例如圖 5 所示，為利用衰減波原理製成的分光鏡。若只有單片稜鏡，會觀察到全反射現象，但若使用如圖所示的兩片稜鏡，調整兩稜鏡的間隙(約為奈米尺度)，可以改變反射光和透射光的比例。

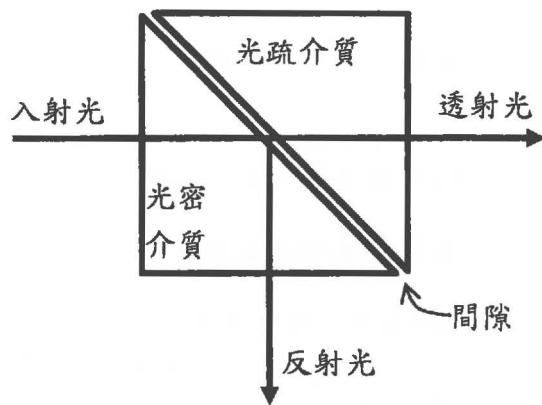


圖 5

設光密介質折射率為 n_1 ，而光疏介質折射率為 n_2 ，如圖 6 所示。根據司乃耳定律：在臨界角

時 $\theta_I = \theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ 時，折射角恰為 $\theta_T = 90^\circ$ ，

即穿透波恰好與介面平行。當 $\theta_I > \theta_c$ 時僅觀察到反射波，而沒有折射波，此即為全反射的現象。全反射時，雖然光疏介質中沒有折射波，但場並不等於零，此即為衰減波形成的原因。以下說明可以更了解衰減波；設入射光為單一頻率 $\left(= \frac{\omega}{2\pi}\right)$ 的平面波，電場可用複數形式表示為

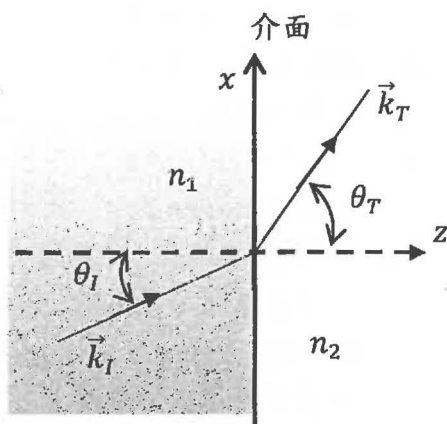


圖 6

$$\tilde{E}_I(\vec{r}, t) = \tilde{E}_{0I} e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

其中 \tilde{E}_{0I} 為振幅， ω 為角頻率， \vec{k}_I 為波向量，即 $|\vec{k}_I| = \frac{\omega n_1}{c}$ ， c 是光在真空中的波速。

同理，透射波的電場(複數形式)可表示為

$$\tilde{E}_T(\vec{r}, t) = \tilde{E}_{0T} e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

其中 $|\vec{k}_T| = \frac{\omega n_2}{c}$ ，且可以寫成 $\hat{k}_T = \sin \theta_T \hat{x} + \cos \theta_T \hat{z}$ 。

【註】在全反射情況下，依照折射定律會給出 $\sin \theta_T = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_I > 1$ ，而造成 $\cos \theta_T =$

$\sqrt{1 - \sin^2 \theta_T} = i\sqrt{\sin^2 \theta_T - 1}$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ 。此時 θ_T 已經不同於一般角度的定義。

上述公式中的電場也因為計算方便，而表示成 \tilde{E} 的複數形式，而其“實部”即為 \vec{E} 。例如複數尤拉式為 $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ ，取實部時， $\text{Re}\{e^{i\omega t}\} = \text{Re}\{\cos \omega t + i \sin \omega t\} = \cos \omega t$ 。

(A) 證明此衰減波沿平行界面的 x 方向行進，在垂直界面的 z 方向衰減。即：

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0T} e^{-\delta z} e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\text{其中 } \delta \equiv \frac{\omega}{c} \sqrt{(n_1 \sin \theta_I)^2 - n_2^2}, k \equiv \frac{\omega n_1}{c} \sin \theta_I。$$

(B) 定義 $\frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} \equiv \alpha$ ，已知全反射時 α 是一個純虛數，定義 $\beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$ ，其中 μ_1, μ_2

為光密介質和光疏介質的磁導率。若入射光電場 \vec{E}_I 平行入射面(即 xz 的平面)時，則每單位面積、每單位時間，有多少比例的能量被反射？即求其反射係數 R_{\parallel} 。

【註】：當入射光電場 \vec{E}_I 平行入射面時；由菲涅耳方程式(Fresnel's equation)可以得到：

$$\vec{E}_{0R} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right) \vec{E}_{0I}, \vec{E}_{0T} = \left(\frac{2}{\alpha + \beta} \right) \vec{E}_{0I}; \text{其中 } \vec{E}_{0R} \text{ 為經由介面反射之電場。}$$

(C) 若入射光電場 \vec{E}_I 垂直入射面時，求此時的反射係數 R_{\perp} 。

【註】：當入射光電場 \vec{E}_I 垂直入射面時；由菲涅耳方程式(Fresnel's equation)可以得到：

$$\vec{E}_{0R} = \left(\frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \right) \vec{E}_{0I}, \vec{E}_{0T} = \left(\frac{2}{1 + \alpha\beta} \right) \vec{E}_{0I}。$$

(D) 在偏振方向垂直入射面的情況下，證明衰減波的電場及磁場的實部可寫為：

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{-\delta z} \cos(kx - \omega t) \hat{y}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{\omega} e^{-\delta z} [\delta \sin(kx - \omega t) \hat{x} + k \cos(kx - \omega t) \hat{z}]$$

【註】：電磁波偏振方向定義為電場的方向；且電場與磁場關係為 $\vec{B} = \frac{1}{v} (\hat{k} \times \vec{E})$ ，

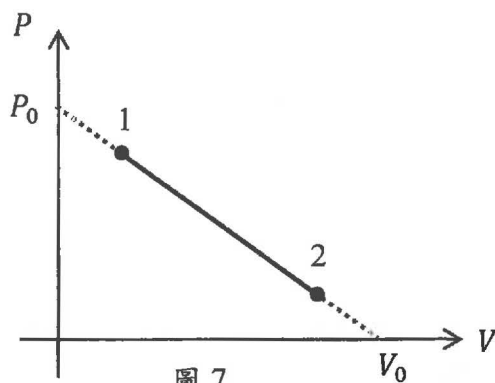
其中 v 為電磁波傳遞速度， \hat{k} 為波前進方向的單位向量。

(E) 計算波印廷向量 $\vec{S} = \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B})$ ，其中 μ 為介質的磁導率，且求其時間平均值；以此

此平均值解釋波能量傳播的方向，以及波能量與進入介質 2 的深度 z 的關係。

四、吸(放)熱與升(降)溫

一莫耳單原子理想氣體歷經一熱力學過程 $1 \rightarrow 2$ ，過程中其壓力-體積曲線可描述成如下圖 7 所示之線性關係。(注意：除非特別聲明，本題答案請以圖中參數 P_0 、 V_0 、及氣體常數 R 表示。)



- (A) 試求在 $1 \rightarrow 2$ 熱力學過程中，該氣體的溫度最大值。
- (B) 此氣體在 $1 \rightarrow 2$ 熱力學過程中，在某一段體積範圍內為吸熱過程，另一段則為放熱過程，試問氣體由吸熱轉為放熱時的臨界體積為何？
- (C) 氣體由吸熱轉為放熱時，其溫度與 $1 \rightarrow 2$ 過程中最高溫度的比值為何？
- (D) 若已知氣體在狀態 1 及狀態 2 時，其壓力分別為 $P_1 = \frac{3P_0}{4}$ 、 $P_2 = \frac{P_0}{4}$ ，則氣體在 $1 \rightarrow 2$ 熱力學過程中，共吸收(或放出)多少熱？
- (E) 承(D)小題，氣體在 $1 \rightarrow 2$ 熱力學過程中，其熵的變化量為何？

五、超導環

考慮一超導環如圖 8 所示，環直徑為 $D (= 2r = 10\text{ cm})$ ，線直徑為 $d = 0.5\text{ mm}$ 。超導線環進入超導態後，通入電流 $I = 100\text{ A}$ ，檢測超導電性，發現經過一年，未偵測到電流衰減。實驗中使用偵測器的靈敏度為 $1\text{ }\mu\text{A}$ ；真空磁導率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{ N/A}^2$ 。

試回答以下問題：

- (A) 求超導環的電感 L 。
- (B) 假設此超導環仍存在一個很小的電阻 R ，時間零點時(即 $t = 0$)起始電流 $I(0)$ ，計算電流 $I(t)$ 隨時間 t 變化的關係式。
- (C) 承(B)題，超導環電阻率為 ρ ，計算在實驗誤差範圍內，估算超導環電阻率(ρ)的上限值。

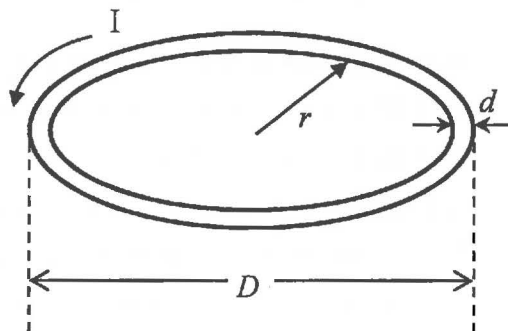


圖 8

六、在強磁場中振盪的吉他弦

在強磁場中彈奏吉他，可能發生危險嗎？某人在一磁場強度 $B = 1.5 \text{ T}$ 的水平方向磁場中彈奏吉他，如圖 9 中進入紙面的磁場。假設他彈奏的弦之基頻 $f = 330 \text{ Hz}$ ，彈奏時弦的 2 倍振幅值 $A_{pp} = 1 \text{ mm}$ ，如下圖 9 所示。

已知該弦長 $L = 66 \text{ cm}$ ，且直徑為 $d = 0.23 \text{ mm}$ ，電阻率 $\rho = 12 \mu\Omega \cdot \text{cm}$ ，熱傳導係數 $k = 80 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ ，線密度為 0.3 g/m ，比熱為 $500 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ ，且兩端固定在溫度恆為 20°C 的金屬栓上。若彈奏時，該弦以正弦波形式在 $x-y$ 平面上振動，且經由熱輻射、對流、以及由手指傳導流失的熱可以忽略，亦即熱僅能經由該弦傳導至金屬栓流入大氣，試回答以下問題：

- (A) 彈奏時，磁場在弦上產生的感應電動勢為何？
- (B) 該感應電動勢產生的平均電功率為何？
- (C) 理論上，該弦可能達到的最高溫度為何？

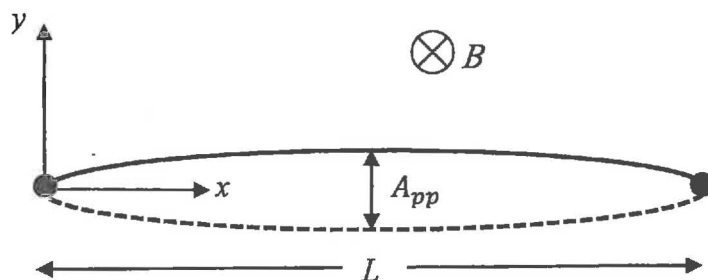


圖 9