

2018 年第 19 屆亞洲物理奧林匹亞競賽及 第 49 屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2017 年 11 月 11 日

13 : 30~16 : 30

考試時間：三小時

<<注意事項>>

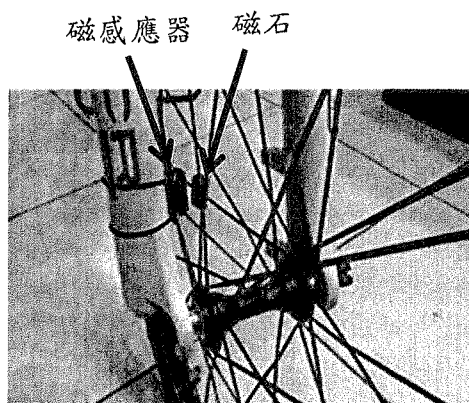
- 1、本試題包括填充題三十格及計算題兩大題，合計總分為 150 分。
- 2、填充題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
- 3、計算題部分，請在答案卷指定之位置作答。
- 4、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。

2018 年第 19 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 49 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題

※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

壹、填充題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

- 一、如圖 1 在自行車的輪框上裝置一磁石，在車架上裝置一磁感應器，每當磁石隨輪旋轉而通過感應器時，感應器即傳送一訊號給車速表，如此就構成了可以顯示時速的自行車車速表。若磁石質量為 10 公克，車輪半徑為 60 公分，磁石安裝位置距輪軸 40 公分，當每秒傳送的訊號數為 2，則其車速為 (1) km/h；



磁石所受的向心力為 (2) N。

圖 1

- 二、在 20°C 時將容量為 250cm^3 的玻璃瓶裝滿水(滿到再增加任何一點都會溢出)。現將水與瓶一起加熱到 50°C ，則會溢出 (3) cm^3 的水。(水在 20°C 的受熱體膨脹係數為 $0.21 \times 10^{-3} \text{K}^{-1}$ ，玻璃在 20°C 的線膨脹係數為 $0.5 \times 10^{-6} \text{K}^{-1}$)

三、

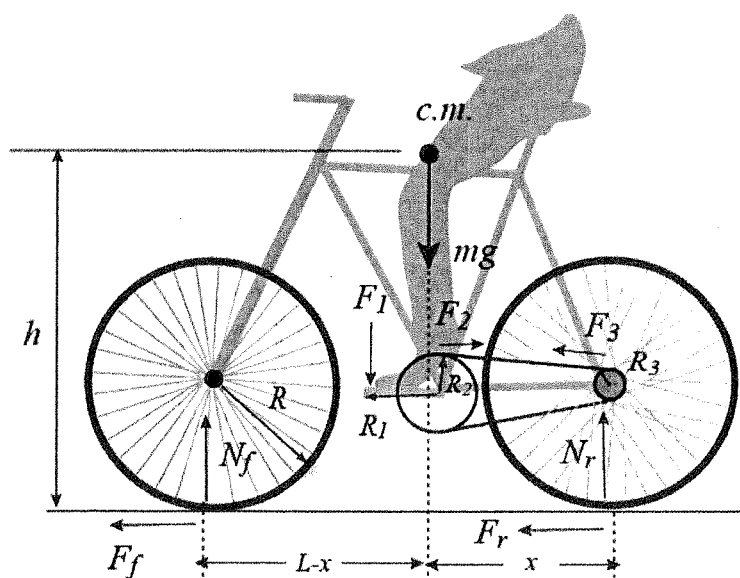


圖 2

圖 2 為一簡化之腳踏車與騎士受力圖。此處 N_f , N_r 分別為地面施於前輪與後輪的正向力， F_f , F_r 分別為前輪與後輪所受平行於地面的力。整個系統總重量為 mg ，

質心(c.m.)距地面垂直之距離為 h ，質心距前輪與後輪與地面接觸點之水平距離分別為 $L-x$ 與 x 。騎士腳施力 F_1 垂直於踏板上，曲柄長度為 R_1 ，前齒輪盤徑為 R_2 ，後飛輪盤徑為 R_3 ，輪圈半徑為 R 。 F_2 與 F_3 分別為鍊條對齒輪盤與飛輪盤之施力。回答下述問題。(A) F_r 提供腳踏車前行之動力， F_r 必須克服重力，內部與外部摩擦力，空氣阻力，而 F_r 可由內力 F_1 透過齒輪與飛輪傳動所提供。試問 F_r/F_1 比值為何(4)_____？(以 R_1 、 R_2 、 R_3 與 R 表示)(B) 現在考慮腳踏車行進中緩慢煞車，不踩踏板，(F_1 為零，即不考慮系統內力)，假設前輪與後輪鎖死不轉動，僅考慮 F_r 與 F_f (輪胎與地面之摩擦力)，設輪胎與地面動摩擦係數為 μ_k ，當系統處於力矩平衡時，求 N_f 與 N_r _____ (5)_____。(注意 F_r 與 F_f 方向的改變)

- 四、在鉛球運動中，運動員在投擲圈內單手將鉛球從肩部推出鉛球(如圖3所示)，鉛球擲出後須落於扇形落地區內，方視為有效試擲，丈量成績以鉛球落地痕跡的最近點取直線量至投擲圈內緣，丈量線應通過投擲圈圓心。鉛球質量為 $m = 7.2\text{kg}$ ，投擲圈半徑 $R = 1\text{m}$ ，扇形區邊線延長應通過投擲圈圓心 O ，圓心角約為 35° (如圖3所示)。考慮運動員將鉛球擲出時鉛球位於投擲圈內緣 A 點中心線上，鉛球離手距地面為 $h = 2\text{m}$ ，速度為 $\vec{v}_0 = 12\text{m/s}$ 與水平面夾角為 $\theta = 45^\circ$ ，但與水平面中心線夾角為 ϕ 。當 $\phi = 10^\circ$ 時，求鉛球飛行距離為_____ (6)_____ m 。為使鉛球落於落地區，求最大 $\sin\phi$ 值為_____ (7)_____。

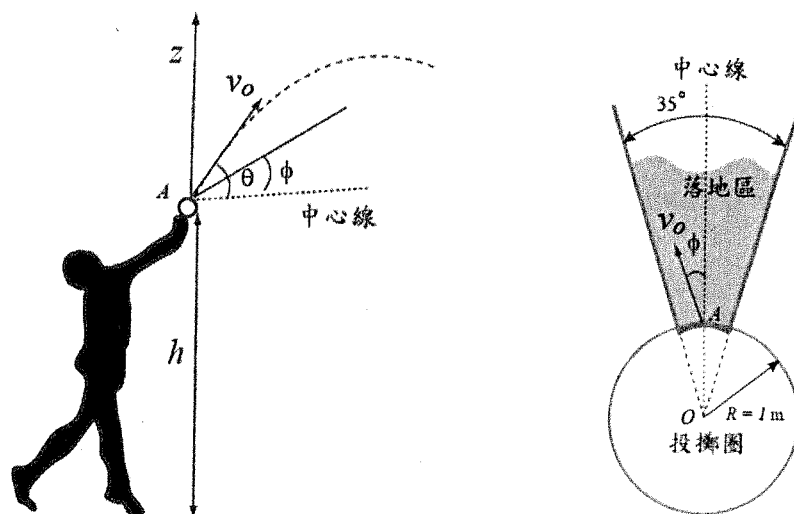
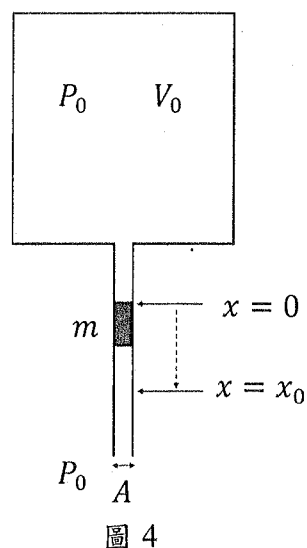


圖 3

- 五、如圖 4 所示，一氣體容器的下方接上一鉛垂剛性細管，細管內有質量為 m 的活塞，細管的截面積為 A 。容器、剛性細管及活塞皆為絕熱的物質所製。活塞的上端在位置 $x = 0$ 時，容器內理想氣體的體積為 V_0 ，氣體壓力恰與容器外的大氣壓力 P_0 相同。已知容器內氣體的體積 V 與溫度 T 遵守 TV^β 為常數的規律，而 β 為一常數。求容器內氣體的體積 V 與壓力 P 所遵守的規律 (8)。

若活塞與剛性細管管壁之間的摩擦力可忽略，重力加速為 g ，重力造成空氣壓力隨高度的變化可忽略，則活塞在力平衡位置時，其上端位置 x_0 的表達式為 $x_0 =$ (9)。

若活塞在 x_0 的上下進行小幅度的振盪，振盪的週期為 T ，求 T 的表達式 (設 $mg \ll P_0 A$)， $T =$ (10)。



- 六、某一行星之衛星質量為 M ，繞行星作半徑為 R 、速度大小為 v_0 的圓周運動，假設有一彗星，質量為 m ，沿著衛星運動的方向從後方撞上，並掉落在此衛星上。此過程可視為完全非彈性的一維碰撞，且衛星與行星之間的重力忽略不計，即在碰撞發生前衛星與彗星的速度大小不變。若碰撞後，此衛星並未脫離行星的重力場，則彗星的速度必須小於 (11) (以 M 、 m 、 v_0 表示)。若碰撞後的瞬間，此衛星速度大小增加了 5%，則此衛星繞行星運行的軌跡與原軌道偏離最大的程度為 (12) %？

- 七、日全蝕的成因可以用下列示意圖(圖 5)來說明：

日全蝕發生在美國：2017 年 8 月 21 日
這是 38 年以來首次在美國本土可見的日全蝕

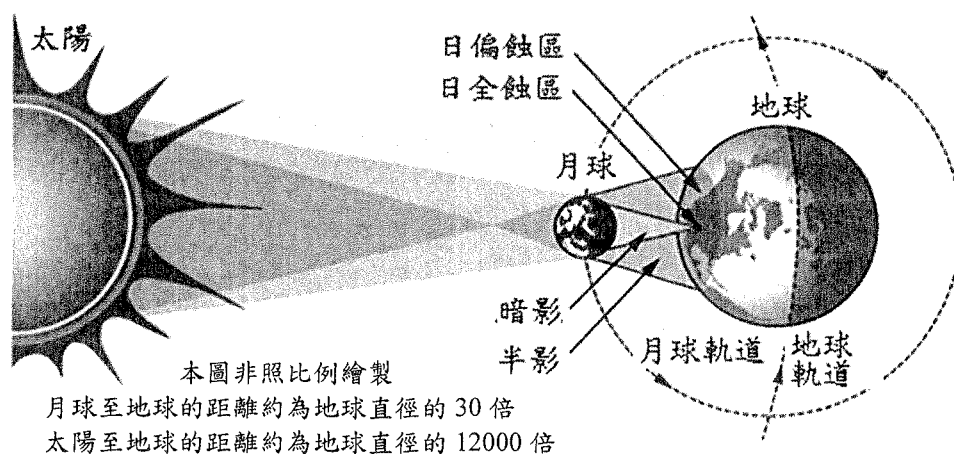


圖 5

由於月球繞地球的軌道面與地球繞太陽的軌道面有五度(5°)的夾角，因此不是每個月都會發生日蝕。

今年八月二十一日(2017.08.21)在美國許多地方可以看見日全蝕，日全蝕發生的地點及時間(以美國東部夏令時間來標示)如圖 6 灰色帶區所示：

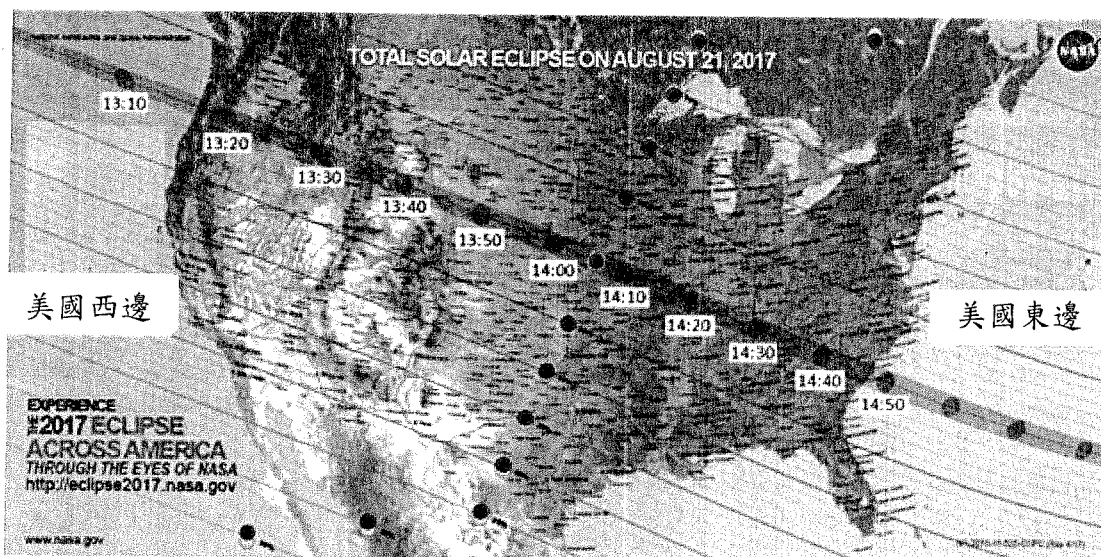


圖 6

已知月球、地球與太陽的半徑分別為 $R_M = 1.737 \times 10^3 \text{ km}$ 、 $R_E = 6.37 \times 10^3 \text{ km}$ 及 $R_S = 6.96 \times 10^5 \text{ km}$ 。若發生日全蝕時，地球中心與太陽中心的距離為 $D_{ES} = 1.50 \times 10^8 \text{ km}$ ，則月球中心與地球中心的距離 $D_{ME} \leq$ (13) km。

在地球上觀測到的月球與太陽的軌跡是由東往西，而由圖 6 可知日全蝕的軌跡卻大致是由西向東。

為了簡化計算，我們假設月球繞地球的軌道與地球繞太陽的軌道都在同一平面上，且地球自轉軸垂直此平面。以地球為靜止坐標，利用下列示意圖(圖 7)及提示，估算每十分鐘日全蝕在地球表面由西向東移動的距離：(14) km。

(提示：已知地球繞太陽旋轉方向、月亮繞地球旋轉方向均與地球自旋方向大致同向。相對於遠處恆星，地球自旋角速度為 $\omega = \frac{2\pi \times 366}{T_0 \times 365}$ ，此處 $T_0 = 86400 \text{ s}$ 為一太

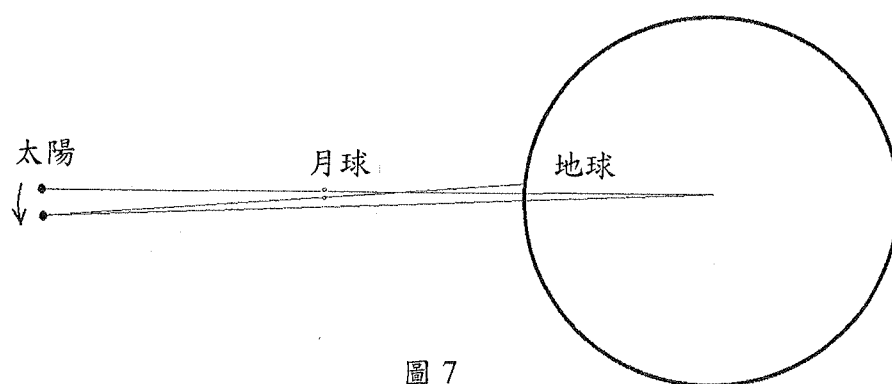


圖 7

陽日的平均時間；地球繞太陽旋轉角速度為 $\Omega_{ES} = \frac{2\pi}{T_0 \times 365}$ ；月亮繞地球旋轉角速度

為 $\Omega_{ME} = \frac{2\pi}{T_0 \times 27.3}$ ，又設此時月球中心與地球中心的距離為 $D_{ME} = 3.75 \times 10^5 \text{ km}$ 。）

- 八、如圖 8 所示，有一質量為 m 、半徑為 R 的鋼珠，在一固定的斜面上，由甲端從靜止開始向乙端作純滾動運動，通過乙端後繼續向地面作斜拋運動。已知斜面甲端比乙端高 h ，乙端比水平地面高 H ，斜面長度為 $2h$ ，鋼珠繞直徑的轉動慣量為 $\frac{2mR^2}{5}$ 。設重力加速度為 g ，且 $R \ll H$ ，則小圓球離開乙端前的加速度量值為_____ (15)，即將觸及地面時的垂直速度量值為_____ (16)。

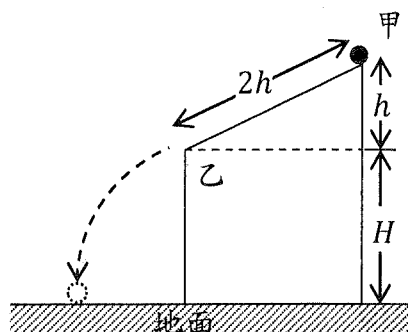


圖 8

- 九、一上下不同截面積的直立氣缸如圖 9 所示，上活塞的截面積為 A_1 、重量為 W_1 ，下活塞的截面積為 A_2 、重量為 W_2 ，兩活塞間以彈簧相連。氣缸內裝有理想氣體，氣缸置於壓力為 P_0 的大氣中。當氣缸內氣體的溫度為 800 K 時，彈簧增長了 $x = 5.0 \text{ cm}$ ，此時上下活塞距氣缸寬狹交接處均為 15 cm，則氣缸內理想氣體的壓力為若干？_____ (17) 請以 P_0 、 W_1 、 W_2 、 A_1 及 A_2 表示之。

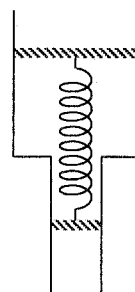


圖 9

將氣缸內溫度由 800 K 緩緩下降，發現彈簧伸長量從原來 5.0 cm 漸減，最後上活塞降至氣缸寬狹交接處而被撐住。已知 $A_1 = 40 \text{ cm}^2$ ， $A_2 = 20 \text{ cm}^2$ ， $W_1 = W_2 = 20 \text{ N}$ ， $P_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ 。若忽略氣缸及彈簧冷縮熱漲效應，則需繼續降至何溫度時彈簧伸長量恰為 0？_____ (18)

- 十、脈衝星 (pulsar) 是恆星演化末期的產物，是一種高速自轉、質量密度極大的中子星 (neutron star)，由於內部有極強的磁場 (如地磁)，帶電粒子在中子星內的運動，會造成電磁波由磁極兩端輻射出去。脈衝星的自轉軸與磁軸一般而言並不相同，所以可以透過觀測其輻射出的電磁波來測量脈衝星的自轉週期 (如燈塔一般)。今有一脈衝星，測量到其自轉週期為 $2.16 \times 10^{-2} \text{ s}$ 。如果此脈衝星是由太陽演化而來，且假設演化過程中太陽質量不變，而且為密度均勻的球體。(太陽質量為 $2 \times 10^{30} \text{ kg}$ ，半徑為 $1.4 \times 10^6 \text{ km}$ ；質量為 M 、半徑為 R 的球體之轉動慣量為 $\frac{2MR^2}{5}$ ，重力常數 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$) 此脈衝星質量密度最小為_____ (19)。
- 由於幅射出電磁波，脈衝星能量因而有所損耗，假設損耗的能量由轉動動能來提供。若觀測到輻射電磁波的總功率為 10^{30} 瓦特 ，假設半徑不變，則此脈衝星轉動角速度的時變率為_____ (20)。

十一、考慮一密度均勻，質量為 M ，半徑為 R 的星體。欲計算該星體的重力位能 U ，可以假想將構成該星體的物質逐層加至半徑為 r 的球狀準星體表面所作的功，並讓 r 由 $r=0$ 逐漸增加到 $r=R$ 。試計算 U ，答案以萬有引力常數 G 、 M 和 R 表示。

$U = \underline{\hspace{2cm}} (21)$ ；假設該星體的組成物質粒子平均質量為 m ，可視為理想氣體，且該星體形成時，有一半的重力位能轉換為星體內能，另一半則以輻射形式散失。試求該星體的溫度 T ，答案以 G 、 M 、 R 、 m 和波茲曼常數 k_B 表示。

$T = \underline{\hspace{2cm}} (22)$ 。

十二、如圖 10 所示，一質量為 m 、上方挖空成半徑為 R 之半球面的木塊置於一水平面上，今有一質量為 m 之質點自球面邊緣處由靜止自由滑落，假設所有界面的摩擦力皆可忽略，試問質點達最低點時，所受來自木塊正向力的量值為 (23)。(設重力加速度為 g)

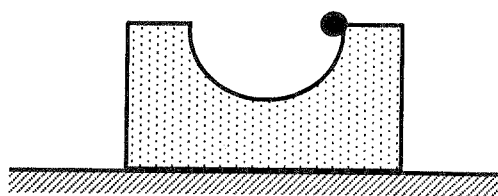


圖 10

十三、如圖 11 所示，一質量為 m 之長直木條經由滑輪連接兩彈簧與不可伸縮之繩索，左右對稱做水平吊掛。兩彈簧之彈力常數各為 k 與 $2k$ ，滑輪的半徑為 R 、轉動慣量為 $\frac{1}{2}MR^2$ ，假設彈簧與繩索的質量可忽略，且摩擦力損耗的功亦可忽略，今使木條維持水平並在鉛直方向運動，試問其振盪週期為 (24)。

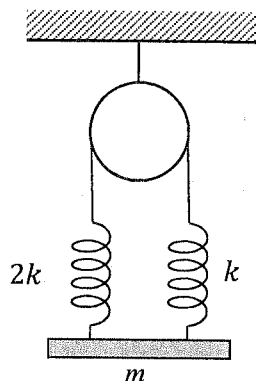


圖 11

十四、如圖 12 所示，一截面積為 a 之U型管，某生將總長度為 L ($L^2 \gg a$, $L \gg b$)、密度為 ρ 之液體注入時，不小心在距離液體左端長 $L/3$ 處產生一氣泡，若此氣泡在大氣壓力下長度約為 ℓ 。設大氣壓力為 P_0 ，則將U型管置放在水平面上平衡時，右管液體達到之最大高度 h 為 (25)。

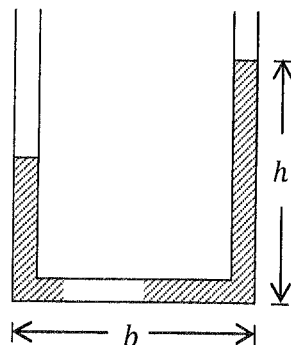


圖 12

十五、 表面張力是一種

作用在兩種不同物質的界面之張力，其作用方向平行於界面的切線方向，傾向於減小界面的面積。

如圖 13 所示，考慮兩個玻璃平板間的軸對稱液體橋。已知兩平板的距離 $h \ll$

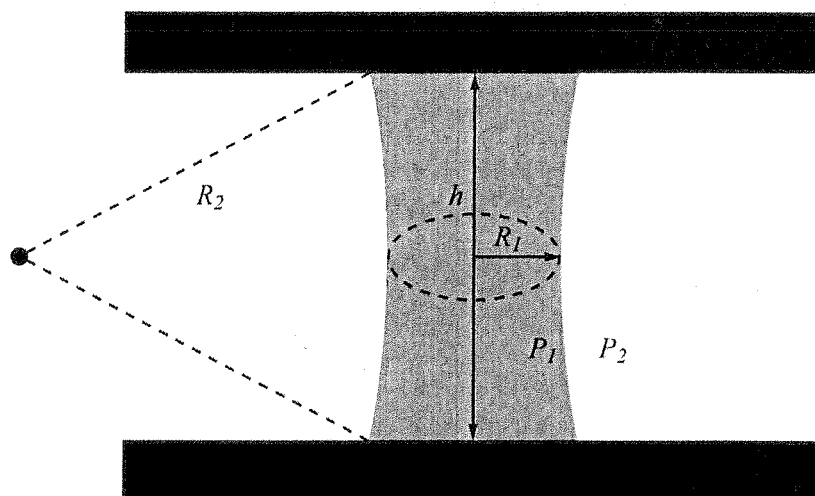


圖 13

R_2 ，液體橋在水平及垂直方向的曲率半徑分別是 R_1 及 R_2 。環境中的大氣壓為 P_2 ，且液體中有大致均勻的壓力 P_1 。若液體與氣體間的表面張力為 γ_1 ，液體與固體間的表面張力為 γ_2 ，固體與氣體間的表面張力為 γ_3 。

求 $(\gamma_3 - \gamma_2)/\gamma_1 =$ (26) (以 h, R_1, R_2 表示) 及 $P_2 - P_1 =$ (27) (以 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, h, R_1, R_2$ 表示)。

十六、 本題假設水為密度為 ρ 之不可壓縮的理想流體，重力的效應很小可忽略。如圖 14 所示，考慮在大氣壓力為 P_0 下，一個固定不動的開口大容器，其內水流速度可近似為零，頂部水面高度可近似為固定不變，底部有一厚度可忽略、橫截面積為 A 的排水小孔。當水流處於穩流狀態時，一流線在小孔內緣處的液壓若為 P_1 ，則依伯努利定理，在小孔外壓力為 P_0 處（緊鄰小孔外緣）的流速 u 須滿足 $P_1 - P_0 = \frac{1}{2} \rho u^2$ （忽略重力項的貢獻）的關係。

由觀察可發現，水流在流出小孔後，其橫截面積會縮小至一極小值 α ，各流線在此截面之速度向量，方向彼此平行一致，且流速均為 u （忽略重力的效應）。依據上述，容器中之水每單位時間流失之淨動量的量值 \dot{p} 為 (28) (以 ρ, u, α, A 表示)，而比值 $r = \alpha/A$ 的範圍應為 (29)。

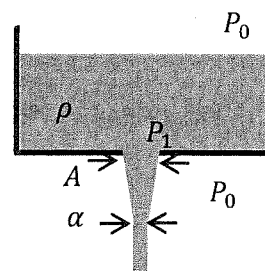


圖 14

- 十七、一立方體物塊靜置於一裝有水和油的圓柱形容器中，物塊邊長為 a ，圓柱形容器的底面截面積為 $3a^2$ 。水、油、物塊的密度，分別為 d , $0.8d$, 和 $2d$ 。如圖 15 所示，若起始時，水和油層的深度分別為 $0.5a$ 和 a （假設水和油完全不互溶，且液體與物塊表面摩擦力可以忽略），試問將物塊緩慢完全提離液面所須作功的最小值為何 (30) ？（以 a , d , 及重力加速度 g 表示。）

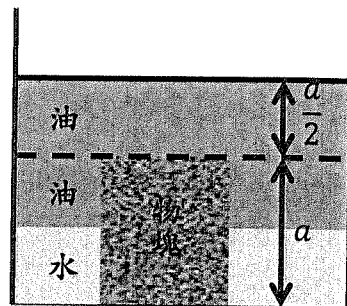


圖 15：起始時物塊與液體之狀態

計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

- 一、一質量為 $m(=1 \times 10^{24} \text{ kg})$ 的行星繞行一恆星運行，其繞行的橢圓軌道如圖 15 軌跡所示，圖中每一方格(約 $1\text{cm} \times 1\text{cm}$)的邊長均為 $1.5 \times 10^8 \text{ km}$ ， O 為橢圓的中心， A 、 B 和 C 在行星軌道上；已知恆星質量 M 為行星的 x 倍，即 $M = xm$ ，且恆星位置在 O 和 A 兩點之間，則：

- (A) 恆星與 A 點的距離為何？橢圓軌道的離心率為何？(4 分)
- (B) 此行星的運行週期為 300 天，則 x 的數值為何？(3 分)
- (C) 此行星在橢圓軌道上運行的角動量為何？(4 分)
- (D) 此行星在 B 和 C 點的速率各為何？(4 分)

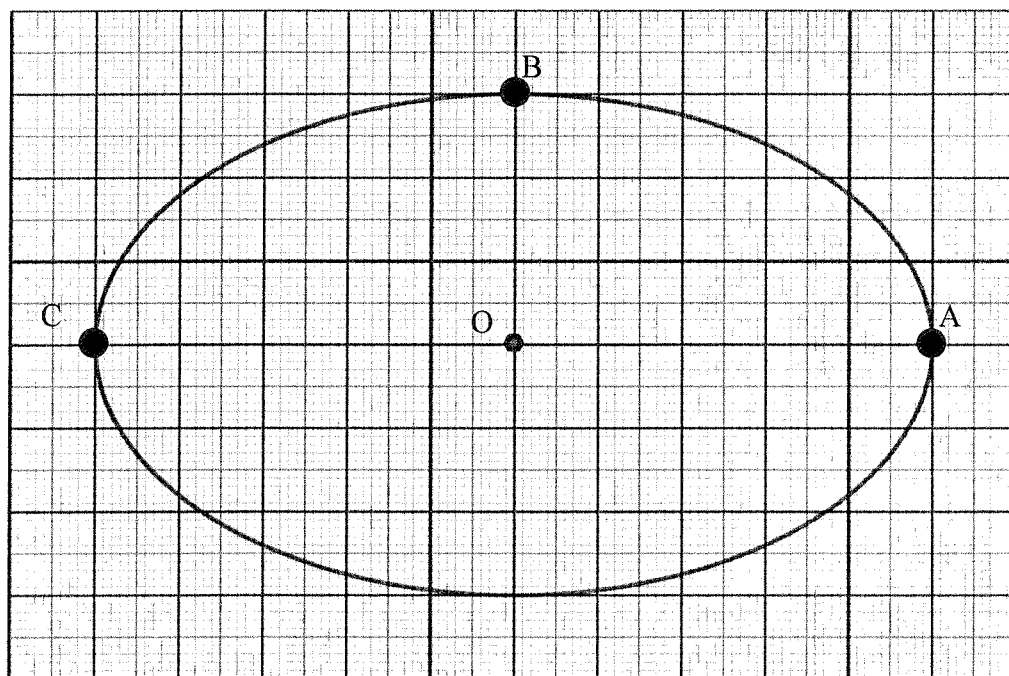


圖 16：行星運行之橢圓軌道。

二、理想氣體定律；理想氣體內能；絕熱與等溫過程；熱力學第一定律

如圖16所示，有兩個熱容量很小、尺寸和形狀完全相同、橫截面積為 A 的汽缸甲和乙。甲由熱的良導體製成，而乙由熱的良絕緣體製成。兩個汽缸的底部封閉，頂部開放，且都浸沒於絕對溫度固定為室溫 T_0 的水中，而大氣壓力固定為 P_0 。每個汽缸都充有氦氣(可視為理想氣體)，且配置有絕熱而無摩擦的活塞，並以連桿與淺盤連接。已知活塞-連桿-淺盤合計的重量為 w_0 ，而最初處於熱力學平衡狀態時，缸內氦氣的絕對溫度都為 T_0 ，兩個活塞比各自汽缸的底部都高出 h_0 。

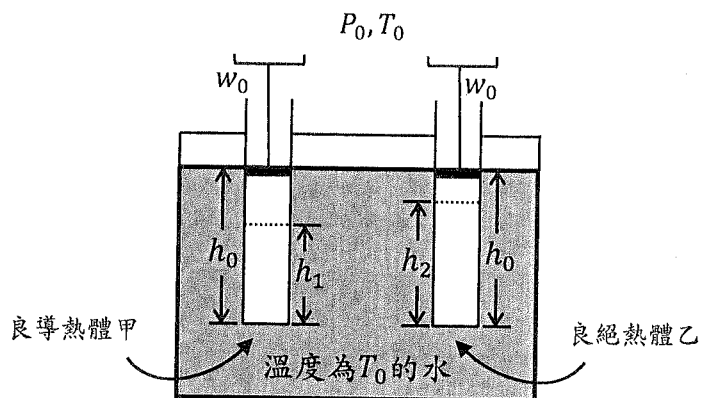


圖 17

假設在以下兩部分考慮的過程中，活塞都沒有高出水面，且氦氣與大氣的重力位能變化可忽略。

A部分(5分)

假設在甲和乙中的氦氣維持近乎平衡的狀態下，每次只將微量的沙粒靜置於每個淺盤上，以壓縮氦氣，直到盤內沙粒的總重量等於 w_s 為止。

(1) 已知在整個壓縮過程中，甲和乙中氦氣的壓力 P 和體積 V 之間的關係為 $PV^\gamma =$ 定值，試問甲和乙中氦氣的 γ 值(分別稱為 γ_1 和 γ_2)各為何？(2分)

(2) 設以 h_1 與 h_2 分別代表甲和乙中活塞的最終高度(從各自汽缸的底部算起)，則最終高度與最初高度 h_0 的比值 h_1/h_0 與 h_2/h_0 各為何？(3分)

B部分(10分)

假設改為一次就將重量同為 w_s 的兩堆沙粒，分別靜置於甲和乙的淺盤上，以致活塞開始做加速度運動，並上下振盪，直到最終再度達到平衡狀態後停下。

(3) 已知甲和乙中活塞的最終高度(從各自汽缸的底部算起)分別為 H_1 與 H_2 ，則甲和乙中氦氣的內能變化量(分別以 ΔU_1 與 ΔU_2 代表)各為何？(4分)

(4) 甲和乙中活塞的最終高度與其最初高度 h_0 的比值 H_1/h_0 與 H_2/h_0 各為何？(6分)

2019 年第 20 屆亞洲物理奧林匹亞競賽及
第 50 屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2018 年 11 月 10 日

13 : 30~16 : 30

考試時間：三小時

〈〈 注意事項 〉〉

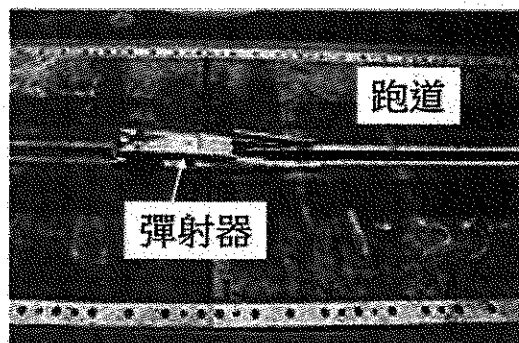
- 1、本試題包括填充題三十格及計算題兩大題，合計總分為 150 分。
- 2、填充題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
- 3、計算題部分，請在答案卷指定之位置作答。
- 4、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。
- 5、限以藍色或黑色原子筆作答。

2019 年第 20 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 50 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題

※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

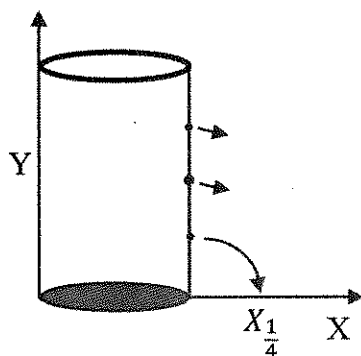
壹、填充題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

- 一、艦載戰鬥機如何能在長度有限的航空母艦甲板上起飛呢？除了艦載機自身動力及航空母艦以高航速逆風航行而產生的相對逆風外，如圖一所示的彈射器也是新型航空母艦的必要裝備。由於彈射器的輔助，戰鬥機在跑道前衝時，可在 45.0 m 的距離內由靜止達到時速 252 km(相對於航空母艦)而起飛。若將此彈射過程視為等加速度運動，則整個過程歷時 (1) s，其加速度為 (2) m/s^2 。

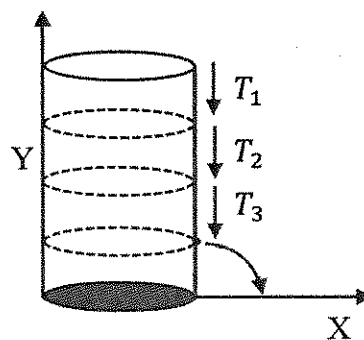


圖一

- 二、在一個未加蓋的圓柱形水桶內裝滿水，桶的高度及截面積分別為 H 及 A 。今在水桶側面不同高度處分別鑽了三個小孔，設小孔截面積均為 a ，且 $a \ll A$ 。若各孔分別在距離水面 $\frac{1}{4}H$ ， $\frac{1}{2}H$ 及 $\frac{3}{4}H$ 的高度(水桶在穩定的水流射出過程中持續維持滿水位)。設從三小孔射出之水柱，分別掉落到平面上距離桶側 X_1 ， X_2 ， X_3 處，如圖二所示。求出此三個距離之比，即 $X_1 : X_2 : X_3 =$ (3)。若是將上面兩小孔封住，且從滿水位開始，水從小孔射出，如圖三所示，此後不再補充水量，使得水面隨時間下降，每降低 $\frac{1}{4}H$ 高度所需要的時間依序為 T_1 ， T_2 及 T_3 ，試比較此三段時間之長短 (4)。



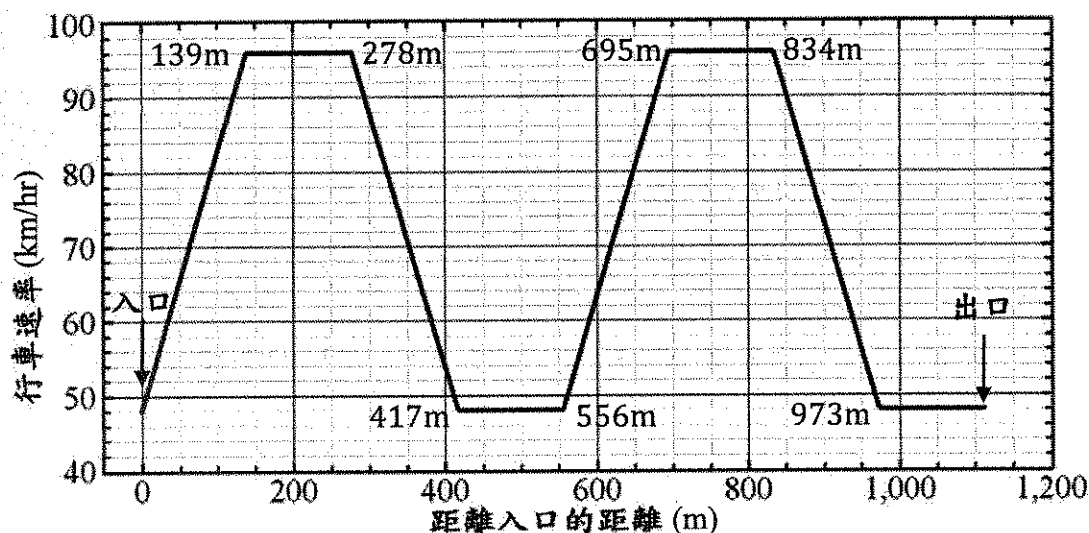
圖二



圖三

- 三、新北市警局在「萬里隧道」實施隧道內「平均速率」科技執法，透過隧道入口和出口架設的偵測器，對於隧道內平均速率超過70.00 km/h的車輛嚴格取締，僅一個月就有超過2500輛次因超速違規被取締。已知「萬里隧道」全長1112 m，則車輛行經隧道至少需時 (5) s(數值需精確至小數點第二位)，才不會被取締？已知某車在「萬里隧道」內每各位置的速率，其結果如圖四所示，此車每經過139.0 m就變換一次行車方式，可是該車並沒有因為超速而被取締，因為該車通過隧道費共費時 (6) s。(數值需精確至小數點第二位)

註：積分公式 $\int \frac{dx}{x} = \ln(|x|)$



圖四

- 四、高空氣球搭載各式偵測器為研究氣象及大氣化學時常用的探測方法，其中一些技術可用理想氣體來探討。設有一球形氣球處在大氣壓 1.0 atm、溫度為 15 °C、空氣密度為 1.22 kg/m³ 的環境。(a)考慮氣球半徑為 3.5 m，現將氣球內充滿氦氣(分子 4.0 g/mol)，扣除氣體重量後，求此氣球可以承載的重量為何 (7) ？(b)現改採熱氣球設計，設氣球內熱空氣分子有效質量為 29 g/mol，溫度為 77 °C，若欲使此熱氣球具有與小題(a)氦氣球相同的承載重量，則此熱氣球的半徑為 (8) m。(氣體常數 = 8.3 J/mole · K，有效數字取至兩位)

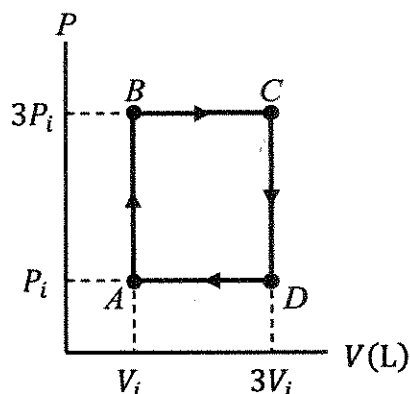
- 五、國際一級方程式賽車(F1)的賽車手，為了可以穩定高速過彎(速率可達 300 km/h)與煞車，平時需要進行高度的體能訓練，才不會因承受很大的高速轉彎離心力與煞車慣性反作用力，過度疲累而發生事故。假設某位 F1 賽車手，開著約 1700 kg 的法拉利跑車，挑戰在澳洲墨爾本亞伯公園的比賽，其輪胎之靜摩擦係數 $\mu = 1.3$ 。另一位參賽車手，開著 1600 kg 的賓士跑車，其輪胎之靜摩擦係數 $\mu = 1.4$ 。假設賽道的某個彎道的道路傾斜角度為 30°，且彎道的曲率半徑 $r = 50$ m，則這兩位賽車手，

在彎道上的最高速率何者較快____(9)____?

較快者之最高速率為____(10)____km/h。(假設車子轉彎時不滑動。)

- 六、汽缸內有 2.0 莫耳的理想氣體，其原先的體積、壓力及溫度分別為 V_i 、 P_i 及 T_i 。若此理想氣體的壓力與體積緩慢變化，其變化路徑如圖五的 P - V 圖所示。則經過 ABCDA 一循環後，汽缸內理想氣體對外所作之功為____(11)____。

若測得 $T_i = 27^\circ\text{C}$ ，則汽缸內氣體需自外界吸收的熱能為____(12)____kcal。(氣體常數為 $8.3 \text{ J/mole} \cdot \text{K}$ ，熱功當量為 4.2 J/cal)



圖五

- 七、棒球場上，豪邁的揮棒和擊出全壘打是最振奮人心的時刻。在某一次投打對決時，投手投出速率 v_1 的快速直球被打者以 v_2 的揮擊速率打中。棒球的質量為 m ，半徑為 r ，球棒的質量為 M 。假設打者擊中球的前後，球和球棒在同一直線上運動，兩者接觸的時間是 Δt ，接觸面(平面)的最大面積和球的截面積之比值是 A ($A \ll 1$)。若不考慮轉動，且擊球過程為彈性碰撞，則球的最大壓縮量和球半徑的比值是____(13)____，球的平均受力為____(14)____。

提示： $A \ll 1$ 時， $\sqrt{1-A} \sim \left(1 - \frac{A}{2}\right)$

- 八、地球質量約為 $6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$ ，半徑約為 $6.4 \times 10^6 \text{ m}$ 。(a) 將地球視為一密度均勻的實心球體，考慮地球在質量不變的情形下，均勻地向球心塌縮。當地球的半徑小於 R_c 時，在赤道處地球表面自轉的線速率會大於光速，則 $R_c =$ ____(15)____m。(b) 若地球上的水之總質量約為 $1.4 \times 10^{21} \text{ kg}$ 。假設水均勻地覆蓋在地球表面上，且與地球以相同的角速度轉動，地球的其它部分可視為一密度均勻之實心球。如果地表的水全部蒸發，則地球自轉的週期變化為____(16)____%? (+ 表示增加，- 表示減少。)

註：實心球與薄球殼相對於其球心的轉動慣量分為 $\frac{2}{5}MR^2$ 及 $\frac{2}{3}MR^2$ 。

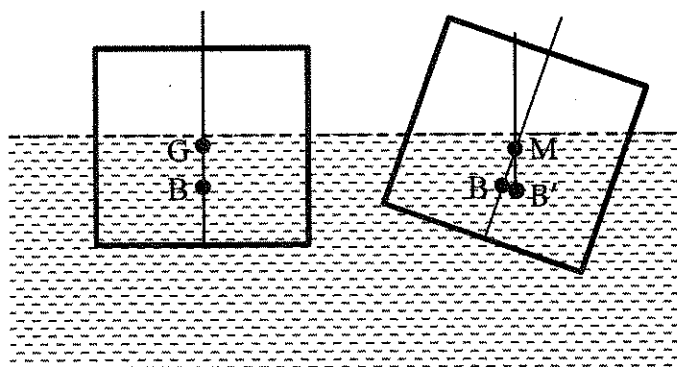
- 九、太陽輻射對地表溫度的影響。(a) 地球因雲與表面冰層，大約僅吸收 70.0% 的太陽輻射。假設地表溫度在一定期間內可視為穩定，且地球可是為一黑體，試估計地表溫度____(17)____K。(註：此溫度為外星人從遠處觀察到的地球溫度，史蒂芬常數 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ ；太陽常數(solar constant) $S = 1370 \text{ W/m}^2$ 。)(b) 接著考慮溫室氣體的效應。來自太陽的輻射絕大部分的能量分布在可見光及頻率更高

的波段；而地表輻射則主要為紅外線。假設地表的溫室氣體完全不吸收太陽輻射，但可完全吸收來自地表的紅外線輻射。試估算地表溫度 (18) K。(c)若上述的溫室氣體僅吸收 80.0% 的地表輻射，再次估算地表溫度 (19) K。

註：由 NOAA 全球氣候報告中顯示，2017 全年地球表面（陸地加海洋）的平均溫度實際為 287.7 K。

- 十、科學家解釋土星環的形成，主要是因為其衛星太靠近土星之故。當行星與衛星的距離小於“ d_{RL} ”時，行星施於該衛星的“潮汐力 (tidal force)”（即行星施於衛星近端與遠端的引力差值），會大於衛星表面自身產生的重力，因此衛星會被撕裂。 d_{RL} 稱為 Roche 極限，由法國天文學家 Edouard Roche 首先提出。現考慮一密度為 ρ_m ，半徑為 r ，質量為 m 的固體球狀衛星，以半徑為 d 的圓形軌道繞行一密度為 ρ_p ，半徑為 R ，質量為 M 的球狀行星。已知一質量為 u 的物體在該衛星表面所受的潮汐力為 $F_{\text{tidal}} = (2GMur)/d^3$ ，試計算此一系統的 $d_{RL} =$ (20)，（以 R, ρ_p, ρ_m 表示之）。已知土星的某一衛星由水冰(water ice)構成(密度為 930 kg/m^3)，土星的質量和半徑分別為 $M_{\text{Saturn}} = 5.68 \times 10^{26} \text{ kg}$ ， $R_{\text{Saturn}} = 60270 \text{ km}$ 。試以上題所得的關係式，計算土星-衛星的 Roche 極限 (21) km。

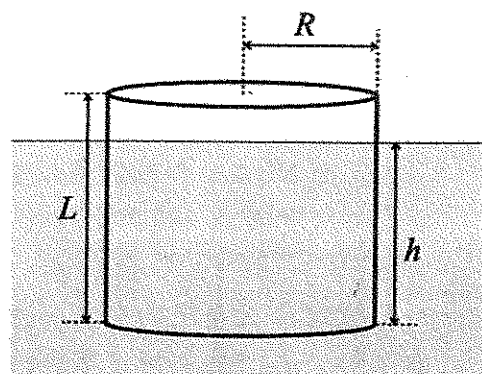
- 十一、船隻的設計須考量其浮於水面時，是否能在受到微擾時仍可維持穩定而不致傾倒。圖六為一個處於靜力平衡狀態的浮體， G 為浮體重心， B 為浮力中心（即水面下的體積的中心）。圖六右為該浮體受到微擾向右傾斜的模樣，此時浮體處於力平衡狀態，但不處於力矩平衡狀態； B' 為傾斜時的浮力中心， M 為通過 B' 的鉛垂線與 \overline{BG} 直線之交點。



圖六

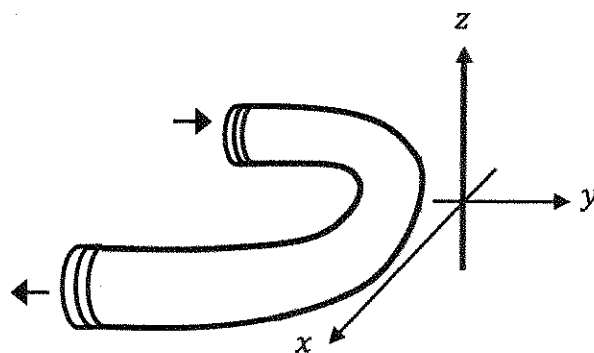
- (a)若希望浮體受到微擾後能轉正，而非繼續往右傾倒，則此浮體須滿足什麼條件？
 \overline{BM} (22) \overline{BG} ，（請填上 $>$ 、 $=$ 、或 $<$ ）。這種受到微擾後還能回復到原位置的平衡狀態，稱為「穩定平衡」。

- (b)如圖七所示，考慮一個高度為 L ，半徑為 R 、比重為 s ($s < 1$) 的均勻圓柱體，鉛直浮於水面。已知對垂直的圓柱體而言， $\overline{BM} = \frac{R^2}{4h}$ ，其中 h 為圓柱體沒入水中的深度。若 $L = 10.0 \text{ cm}$ ， $R = 6.00 \text{ cm}$ ，且此圓柱體處於穩定平衡，則 s 須滿足的條件為 (23)。



圖七

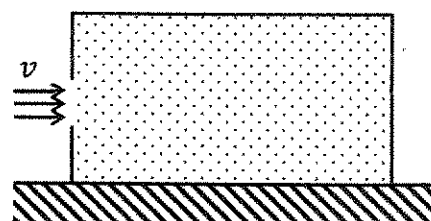
- 十二、如圖八所示，將一段長度為 L 、內有穩定水流之水管在 xy 平面上做 180° 彎曲轉向，若水流在水管入口處之壓力為 p 、流速為 v 、截面積為 A ，在水流出口的截面積增加為 $2A$ ，且水流流入與流出此段水管時分別為沿著 $+y$ 與 $-y$ 方向。設水的密度為 ρ ，若要使此段水管在水流通過時保持固定不動，則在 x 與 y 方向所需施加的力分別為 (24) 及 (25)。



圖八

- 十三、某司機想要運送砂子，他找來了一個質量為 M 、高度為 H 、內部截面積為 A 的容器來裝砂子。容器底部的厚度可不計，而且此容器的重心位於離底部 $H/2$ 的地方。假設砂子均勻的平鋪於容器內，並且運送時希望整個容器與砂子系統的重心可以越低越好。若已知重心達到最低時，容器內砂子的質量也恰好是 M 。若容器內砂子的高度為 αH ，求 $\alpha =$ (26)。

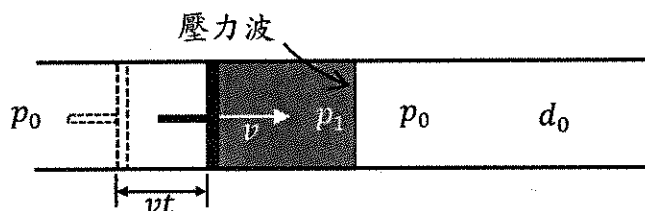
- 十四、如圖九所示，將1莫耳、速度均為 v 的氮分子束注入一個已有1莫耳氮分子、絕對溫度為 T (約在室溫左右)的絕熱容器中。氣體注入後將容器封閉。假設分子束中氮分子之轉動動能可忽略不計，且容器置放在一光滑水平面上，可



圖九

- 自由運動。設容器的體積為 V ，氮分子的分子量為 M 。(a)若容器質量遠大於氣體質量，則容器內氣體分子達熱平衡時的溫度為 (27) (b) 若相對於氣體質量，容器質量可不計 (如容器為一氣球)，則容器內氣體分子達熱平衡時的溫度為 (28) (氣體常數為 R)。

十五、 在大氣中有一個靜立於地面、截面積為 A 的水平長直圓管，其左端裝有一可自由移動的活塞，管內充滿可壓縮流體。假設大氣的絕對壓力 p_0 固定不變，而最初處於平衡態時(時間為0)，管內流體的質量密度為 d_0 。以下考慮在時間從0到 t 的很短時段內，活塞由其平衡位置等速向右移動，因而在流體內造成壓力縱波(如圖十所示)。假設所有運動過程均無熱交換、亦無摩擦，活塞的速度為 v ，緊鄰活塞的流體因受到壓縮，以致壓力升高成為 p_1 ，且此壓力變化以波速 c 向右傳遞，在時間為 t 時到達被壓縮區(圖十所示陰影區)的右端。若在此陰影區之流體的質量密度為 d_1 ，則密度的比值 d_1/d_0 為____(29)____，而壓力差 $p_1 - p_0$ 為____(30)____。



圖十

2020 年第 21 屆亞洲物理奧林匹亞競賽及 第 51 屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2019 年 11 月 2 日

13 : 30~16 : 30

考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

- 1、本試題包括填充題三十格及計算題兩大題，合計總分為 150 分。
- 2、填充題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
- 3、計算題部分，請在答案卷指定之位置作答。
- 4、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。
- 5、限以藍色或黑色原子筆作答。

2020 年第 21 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 51 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題

※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

壹、填充題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

- 一、垂直上拋一質量為 1.0 公斤之橡皮球，在運動過程中，橡皮球遭遇到空氣阻力 f ，且 f 與橡皮球之速度 v 的量值成正比，其函數關係為 $f = -\alpha v$ ， α 為阻力係數且 $\alpha > 0$ 。已知橡皮球自拋出後之速度與時間關係如下數據圖所示。設重力加速度為 10 m/s^2 ；則阻力係數 $\alpha = \underline{(1)}$ kg/s 。在拋出後的第七秒，橡皮球是在哪一個位置？(a)原拋出位置上方；(b)原拋出位置；(c)原拋出位置下方。答案：(2)。

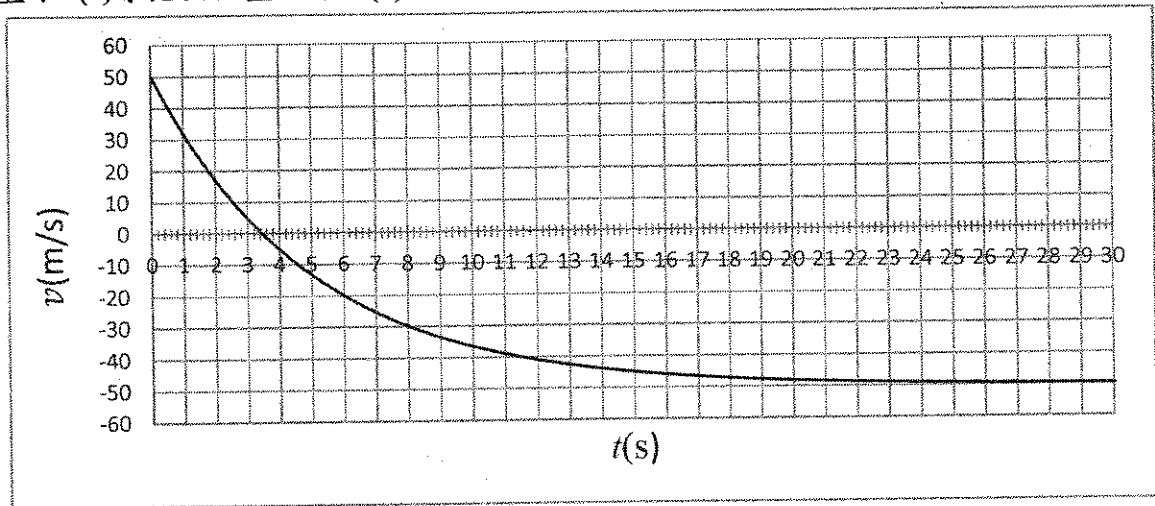


圖 1

- 二、一直徑為 3.0 mm 雨滴，從距離地面 1200 m 高處往下掉落。假設雨滴掉落時為球狀，已知水的密度為 1000 kg/m^3 、空氣密度為 1.2 kg/m^3 ，且球形雨滴在空氣中的拖曳係數為 0.60；則雨滴的終端速度為 (3) m/s 。

註：拖曳力的公式為 $D = \frac{1}{2} C \rho A v^2$ 。其中， D 為拖曳力， C 為拖曳係數， ρ 為空氣密度，

A 為有效截面積， v 為速度。

- 三、台鐵某列車以 90 km/h 的等速率轉彎進入直線軌道當時，司機吃驚地發現前方 600 m 處有一個貨櫃火車頭，恰巧也從旁側軌道併入同一軌道，且正以 36 km/h 作等速度移動，兩車同向行駛；如圖 2 所示。列車司機見狀在 2 秒後踩下煞車。接下來台鐵列車以等減速度運動，且速率在 60 秒後降至 30 km/h ，問此時客車跟貨櫃火車頭的距離為 (4) m 。

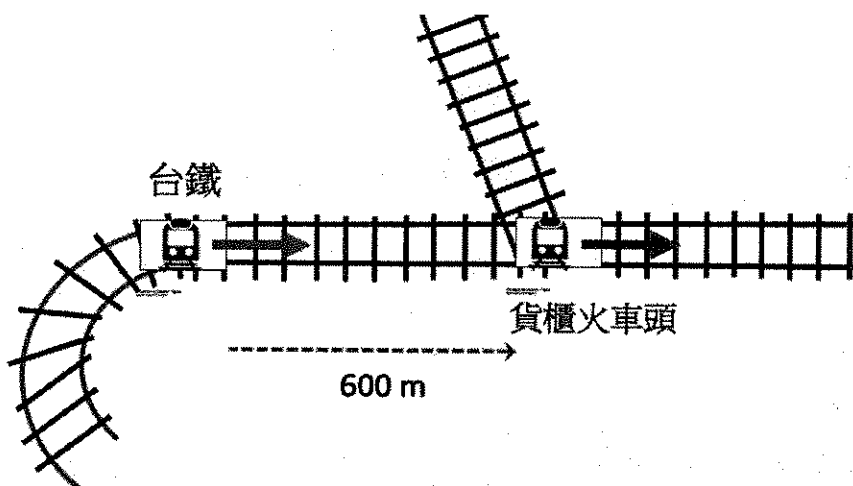


圖 2 台鐵司機看見貨櫃火車頭跟它進入相同軌道示意圖

四、在很多有關液體靜力學的實驗中，有一項著名的實驗稱為「帕斯卡木桶實驗」。實驗示意圖如圖 3 所示，在一半徑 R 為 21 公分、高 H 為 1.0 公尺且充滿水的木桶中，垂直插入一支內半徑 r 為 0.30 公分的細管，在細管中慢慢加水，當細管中的水柱恰好比桶面高 12 公尺時，木桶上蓋會爆開。問木桶上蓋在正要爆開前所受力的 $F =$ (5) ；木桶上蓋所受的力與加入細管中水的重量之比值 $\beta =$ (6) 。設重力加速度為 10 m/s^2 。

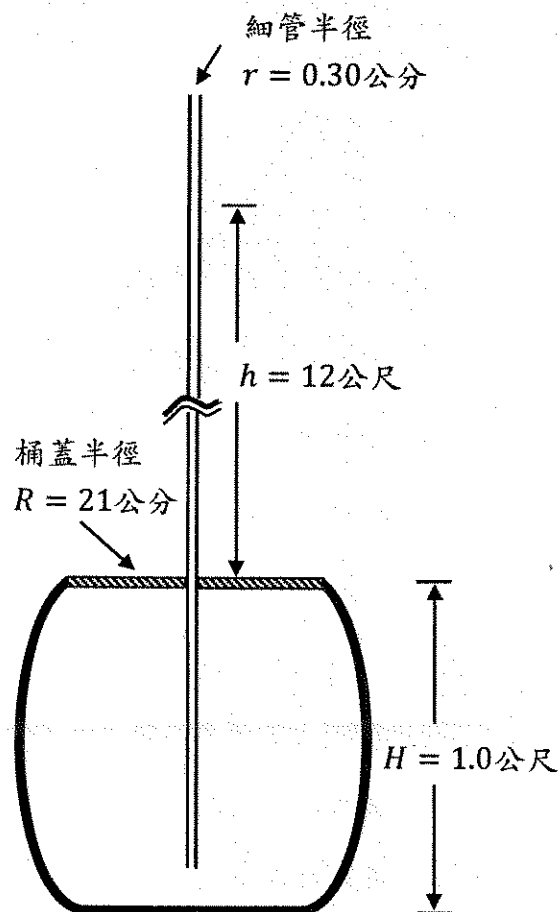


圖 3

五、一個連通管實驗裝置內裝有有甲、乙兩種不可壓縮，也不互溶的液體，密度分別為 $\rho_{\text{甲}}$ 、 $\rho_{\text{乙}}$ 。

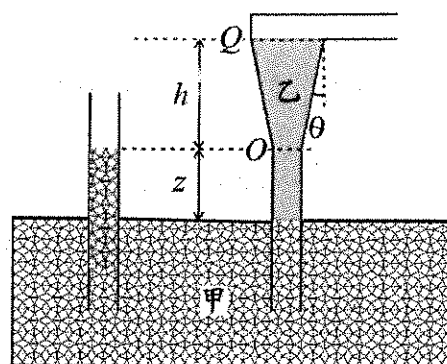


圖 4

- (a) 在靜止時兩種液體的液面位置如圖 4 所示，左管液面高度為 z ，且左、右兩管的液面高度差為 h ，試求 $h = \underline{\hspace{1cm}} (7) \underline{\hspace{1cm}}$ (以 $\rho_{\text{甲}}$ 、 $\rho_{\text{乙}}$ 、 z 表示之。)

- (b) 在左側管子中對甲液體施力，使甲液體的液面以 v_0 的速率等速向下移動，在某一時間的液體位置圖如圖 5 所示。若左管的直徑為 d ，右側直管在 O 點以下的直徑和左管相同，而橫管的直徑是右管在 Q 處的直徑之三分之一，試計算此時乙液體在右側橫管內的移動速率為 $\underline{\hspace{1cm}} (8) \underline{\hspace{1cm}}$ 。

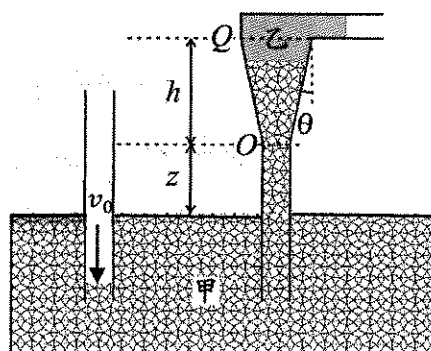


圖 5

- 六、有一長為 ℓ 、質量為 M 的均勻鐵桿，一端固定於 A 點，而且鐵桿以 A 點為支點，在鉛直面上轉動。鐵桿另一端上附有一質量為 m 、體積可不計的小球，鐵桿初始位置與鉛垂線夾 60° ，如圖 6 所示。因重力作用系統繞 A 點擺動，當小球擺至最低點時，小球速率為 $\underline{\hspace{1cm}} (9) \underline{\hspace{1cm}}$ m/s； A 點在鉛直方向受力的量值為 $\underline{\hspace{1cm}} (10) \underline{\hspace{1cm}}$ N。

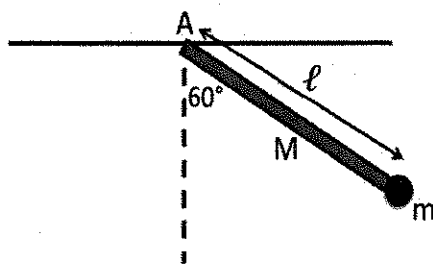


圖 6

註：均勻鐵桿繞其質心轉動之轉動慣量為 $M\ell^2/12$ ，繞其端點轉動之轉動慣量為 $M\ell^2/3$ 。

- 七、在絕熱容器中之理想氣體，其初始壓力為 P_0 、體積為 V_0 ，先經過一自由膨脹過程，使得體積增加為 $3V_0$ ，然後再緩緩的進行絕熱壓縮至原來體積 V_0 ；這時壓力為 $3^{1/3} P_0$ 。(a)上述第一階段自由膨脹過程，體積增加為 $3V_0$ 時，氣體溫度為初始溫度的 $\underline{\hspace{1cm}} (11) \underline{\hspace{1cm}}$ 倍。
(b)若是由初始狀態經歷一個等熵過程後，使得理想氣體體積由 V_0 增加到 $5V_0$ ，則此時氣體的溫度是起初始溫度的 $\underline{\hspace{1cm}} (12) \underline{\hspace{1cm}}$ 倍。

- 八、一人造衛星以圓形軌道繞行地球，經過一段長時間後，因有些許空氣阻力造成該衛

星的總機械能減少了1焦耳；則該衛星的動能變化量為(13)焦耳。(用"+"值表示增加、"- "值代表減少)

九、一質量為 m 的質點，置於一半徑為 R 、面密度為 σ 的半球殼球心位置；則該球殼作用於此質點的萬有引力為(14)；以重力常數 G ， m 和 σ 表示之。

十、在一水平桌面上有一個質量為 M 、半徑為 R 的圓盤，圓盤繞著一個中心無摩擦的轉軸轉動，如圖7所示。沿著圓盤邊緣切線水平方向有一力 \vec{F} 作用， $|\vec{F}| = F = \text{常數}$ 。

已知圓盤繞中心軸的轉動慣量為 $\frac{1}{2}MR^2$ ，則(a)當桌面與圓盤間無摩擦時，圓盤轉動的角加速度為(15)，(b)若圓盤與桌面間的摩擦係數為 μ ，則 F 必須大於(16)，圓盤才能夠發生轉動。

積分公式： $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$ ， $n \geq 1$

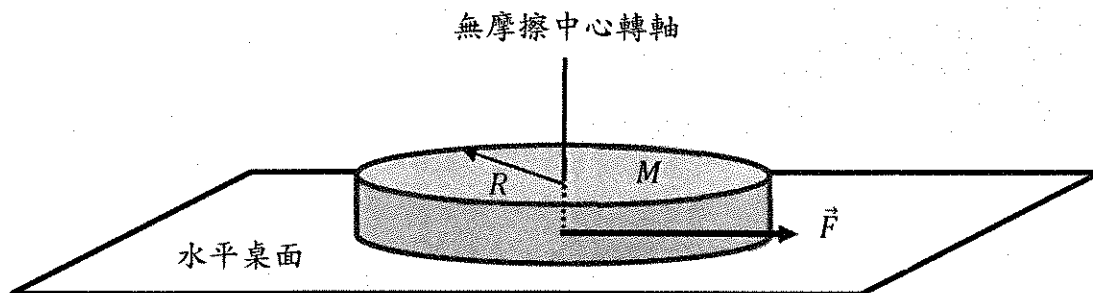


圖 7

十一、兩質量分別為 m_1 、 m_2 的立方體，置於光滑的水平桌面上；兩立方體間以輕質彈簧連接，彈簧彈性常數為 k 。今以水平向右之常力 F 施於立方體 m_1 上，施力持續一段時間後，讓兩立方體由初始位置 x_1 、 x_2 各自產生 Δx_1 、 Δx_2 的位移之後；便移除此力(運動過程中不牽涉轉動)。

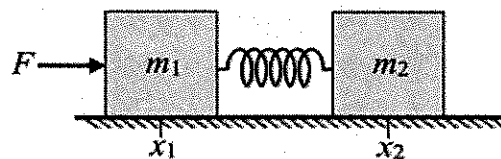


圖 8

產生 Δx_1 、 Δx_2 的位移所施力時間為(17)。移除施力後此系統(連接彈簧的兩立方體系統)之質心動能為(18)。

十二、重力輔助(Gravity Assists)是指利用行星與太空載具之間的重力與相對運動，改變太空載具的速度與軌道。假設太陽質量為 M_0 ，行星為質量 M_1 與太空載具質量為 m ，其中 $m \ll M_1 \ll M_0$ ；且三者在同一水平面上運動。當行星以速度 \vec{V} 繞日運動，圖9顯示出I與II兩種可能的太空載具運動軌跡；且在行星座標系統下，遠離之太空載具以 \vec{v}_1 接近行星，其後以 \vec{v}_2 遠離行星。

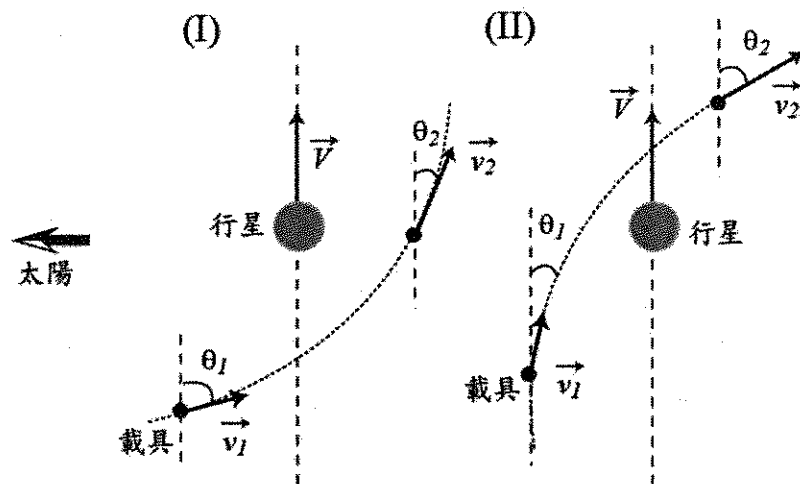


圖 9

- (a) 在行星座標系統下，太空載具行經行星的動能變化為 (19) ；
- (b) 現在考慮在太陽座標系統下，太空載具的動能變化為 (20) (答案以 $m, \theta_1, \theta_2, \vec{V}, \vec{v}_1$ 表示) ；
- (c) 太空載具行經行星時與行星的重力的交互作用可視為完全彈性碰撞過程。若 $\theta_1 = 180^\circ, \theta_2 = 0^\circ$ ，則太空載具行經行星後的所獲的速度為 (21) 。

十三、 考慮一個與外界絕熱的氣體容器，如圖 10(a)所示。其內部以一片導熱隔板分成 A、B 兩個氣室。初始時隔板以插銷固定住，兩氣室體積均為 1 m^3 ；氣室 A 內之空氣壓力為 300 kPa ，溫度 400 K ；氣室 B 內之空氣 1.5 MPa ，溫度 1400 K 。空氣單位質量內能 $u(\text{kJ/kg})$ 與溫度 $T(\text{K})$ 的關係可參考圖 10(b)。現將插銷移除，隔板可以無摩擦自由運動，且空氣可以視為理想氣體；當達到熱力學平衡時容器內的溫度 $T =$ (22) K 與壓力 $P =$ (23) kPa 。

註：通用氣體常數為 $R=8.314 \text{ J/K mol}$ ，1 莫耳(1 mole)空氣質量為 0.02897 kg 。

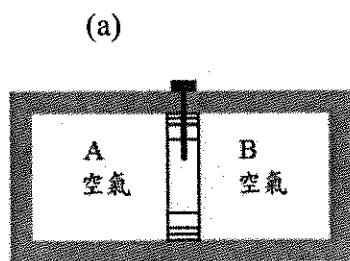
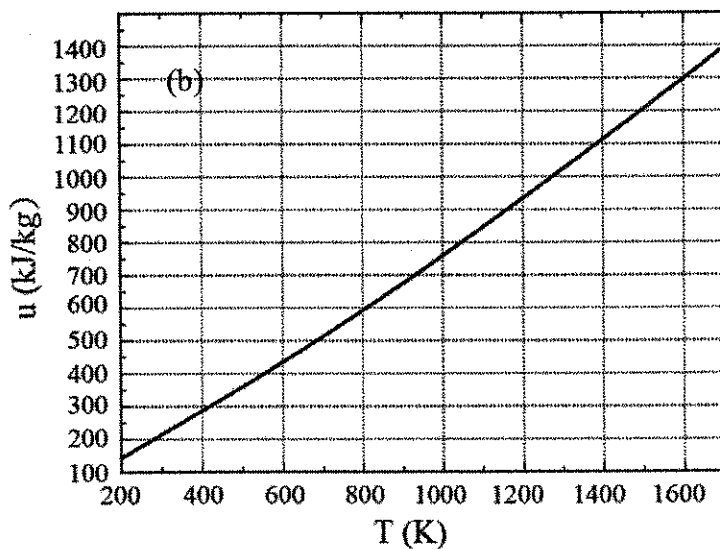


圖 10



- 十四、半徑 R_0 的線圈上有厚度為 d 的肥皂膜，肥皂膜的質量密度為 ρ_s ，表面張力係數為 γ 。另有一支吹肥皂泡用的吹氣管，吹氣管的半徑為 R ($R \ll R_0$)，且吹氣管口貼近肥皂膜(距離遠小於 R)，空氣的質量密度為 ρ_g ，管中空氣的速度為 v_g ，如圖 11 所示。實驗上已知 $v_g \geq v_c$ 時才能成功的吹出肥皂泡；而當 $v_g = v_c$ 時，肥皂膜上恰形成曲率半徑為 R 的彎曲面，若此時肥皂膜受到吹氣管所施加的壓力差為 P_c ，則 $P_c =$ _____ (24) _____，以 R_0 、 d 、 ρ_s 、 γ 表示之。

若 $v_c = A_0 \gamma^a \rho_g^b R^c$ ， A_0 為比例常數，求 a 、 b 、 $c =$ _____ (25) _____。

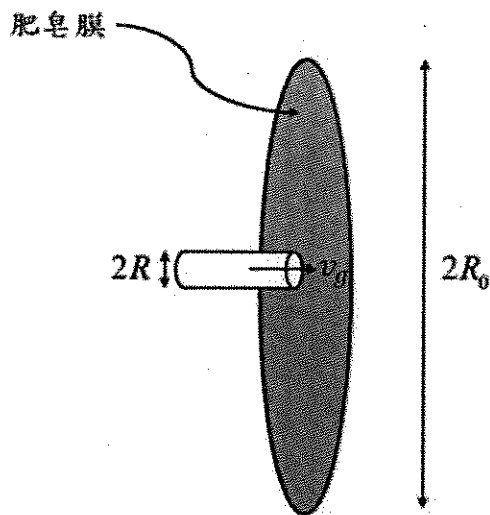


圖 11

- 十五、如圖 12 所示，一個置於光滑水平面上之靜止金屬箱中，有一小木塊以彈性常數各為 $k/2$ 與 $3k/2$ 之理想彈簧與金屬箱兩邊相連，小木塊原先處於平衡點，即箱內 O 點；然而在 $t = 0$ 時，小木塊以初速 v 開始向右運動。假設小木塊與金屬箱間也是光滑可不計摩擦，小木塊體積可忽略不計但質量為 m ，又金屬箱的質量為 $8m$ ，則小木塊在金屬箱內進行振盪運動第 5 次經過 O 點時(起始點不計)，金屬箱移動的距離為 _____ (26) _____。

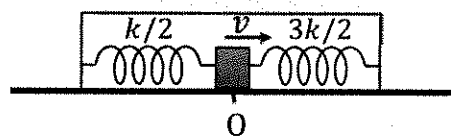


圖 12

- 十六、以聲波操控物體是一個新穎的無接觸式超控技術，其中聲波懸浮物體是聲波操控物體的基礎技術。一平板型物體可懸浮在產生平面聲波的振盪器上，假設懸浮之平板形物體不吸收聲波，則兩者間空氣膜的厚度為 $h(t) = h_0 + \delta h \sin \omega t$ ，其中 h_0 為平板與振盪器的平均間距， δh 為振盪器上下振動的振幅，振盪器的振盪角頻率為 ω ，如圖 13 所示。

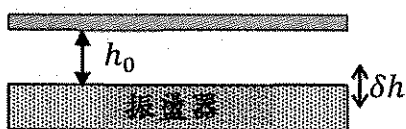


圖 13

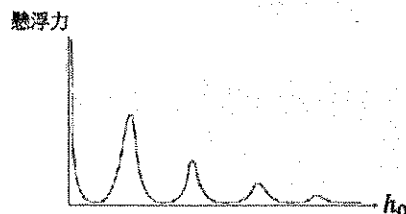


圖 14

- (a)實驗上發現平板形物體所受之懸浮力，在某些特定距離 h_0 達到極值，如圖 14 所示。假設聲波速度為 c ，則兩連續懸浮力最大值的間距為 _____ (27) _____。
- (b)若振盪器產生聲波的波長甚大於 h_0 ，中間空氣膜可以以理想氣體絕熱過程描述；

即 $PV^\gamma = \text{常數}$ ，其中 P 為壓力， V 為體積， $\gamma \approx 1.4$ ；且造成平板物體懸浮的壓力平均值可以表示為 $A\rho^x c^y \omega^z (\delta h)^a h^b$ ，其中 A 為常數， ρ 為氣體的密度；則 x 、 y 、 z 、 a 與 b 之值為 (28)。

十七、考慮 1 莫耳的單原子理想氣體，假設以 p 與 T 分別代表其壓力與絕對溫度，並以 C_α 代表此氣體在熱力學某一個 α 過程中的莫耳比熱，如右圖 15 所顯示之 $p-T$ ， α 用以表示圖中過程 1、2 或 3。圖 15 中三個過程都通過同一點 A，則 $(C_1 - C_2)/R =$ (29)，其中 R 為氣體常數。若 $C_3 = -2R$ ，則在過程 3 中， p 必須與 T 的 (30) 次方成正比。

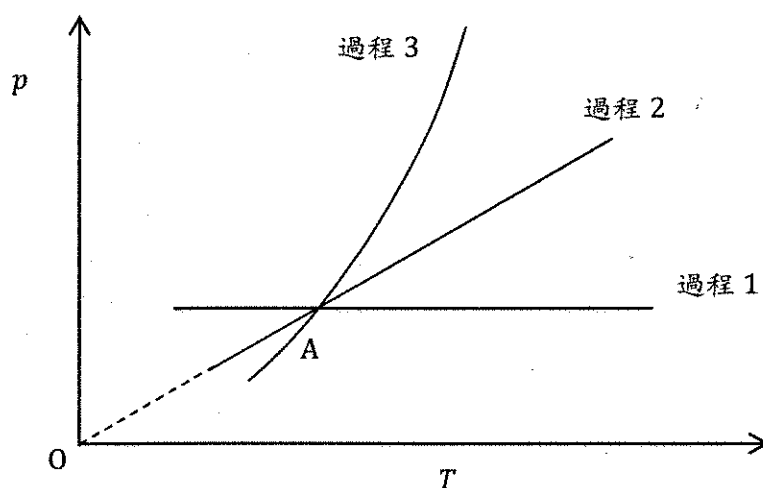


圖 15

計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

- 一、考慮一條垂直懸吊、總長為 L 、線密度為 μ 的鏈子，將其左端固定，右端舉高。此鏈子底部彎曲部分很短，以致其長度與質量均可忽略。令重力加速度為 g ，並將 $+y$ 軸取為垂直向下，則當鍊子右端頂點的座標為 y 時，左右兩段的長度可近似如圖 16 所示。此鏈子最初靜止懸吊時，左右兩段可視為平行，且兩段頂端高度相等($y = 0$)。今使鏈子右頂端從靜止開始自由下落，在圖示的狀態時，右段部分各點的下落速度為 v ，而左段部分為靜止，左段的底端在圖中以 B 點標示，在此點的張力量值為 T_1 。

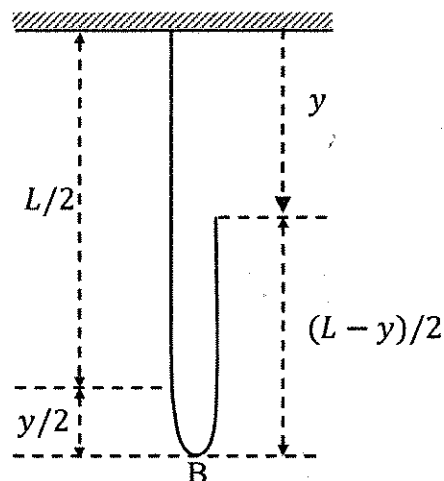


圖 16

- (a) 若取 $y = 0$ 為重力位能的零點，則在圖 16 所示狀態時，求整條鏈子的總力學能 E ，答案以 y 、 v 、 L 、 μ 與 g 表示。(3 分)
- (b) 若整條鏈子的總力學能守恆，求 v ，答案以 L 、 μ 、 g 與 y 表示。(3 分)
- (c) 承(b)小題，求整條鏈子的質心速度 V ，答案以 L 、 μ 、 g 與 y 表示。(3 分)
- (d) 在圖 16 所示狀態時，若將鏈子右邊下落部分的運動方程式表示為

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \mu (L - y) v \right\} = F$$

求 F ，答案以 L 、 μ 、 g 與 T_1 表示。(3 分)

- (e) 若整條鏈子的總力學能守恆，求 T_1 與 v 、 μ 的關係。(3 分)

二、二橫截面分別為 S 和 $2S$ 的圓柱形容器以如圖17所示的連接方式，形成一汽缸。每個圓柱中各置有一活塞，二活塞相距 ℓ ，並以一硬桿相連，構成一“工”字形活塞，將整個汽缸分隔成三個氣室。

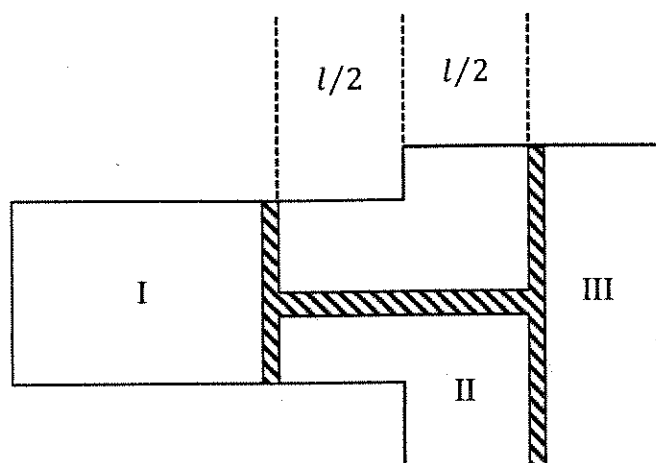


圖 17 汽缸組成示意圖

其中氣室I和氣室III為密閉並分別封有1及2莫耳的相同理想氣體（其莫耳比熱為 C ），且二氣室內裝有電熱器，以供加熱之用。氣室II的汽缸壁上開有一小孔，與大氣相通。當三個氣室中氣體溫度均為 T_1 時，“工”字形活塞恰處於如圖示的平衡位置，此時氣室I內的氣體柱長亦為 ℓ ，氣室II內有1.5 莫耳的空氣。假設大氣壓不變，汽缸壁和活塞均為絕熱，不計活塞與汽缸間之摩擦力，且活塞移動範圍不超過氣室II之通氣孔。現將氣室I和氣室III中的氣體以加熱器緩慢加熱，直到氣室I中氣體溫度升高至 $2T_1$ ，此時活塞左移一距離 d ，則

- 初始狀態時，氣室III中的氣柱長度為何？（以 ℓ 表示。）（5分）
- 在末狀態時，氣室III中氣體溫度為何？（以 T_1 、 ℓ 、 d 表示。）（5分）
- 在此過程中，氣室I和氣室III中之氣體吸收的總熱量為何？（以 T_1 、 ℓ 、 d 、 C 和氣體常數 R 表示。）（5分）

2021 年第 21 屆亞洲物理奧林匹亞競賽及 第 51 屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2020 年 11 月 7 日

13：30~16：30

考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

- 1、本試題包括選擇填充混合題三十格及計算題兩大題，合計總分為 150 分。
- 2、選擇填充混合題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
- 3、計算題部分，請在答案卷指定之位置作答。
- 4、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。
- 5、限以藍色或黑色原子筆作答。

物理奧林匹亞選訓委員會
(02)7734-6054

2021 年第 21 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 51 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題

※本試題含選擇填充混合題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

壹、選擇填充混合題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

一、直徑為 15 公分的平面鏡，置於某人臉之前方 d 公分時，某人恰好可以看到自己長度為 l 公分的整張臉。若將鏡子水平移到 $2d$ 公分時，下列敘述何者正確？(1)。

(單選，以 A、B、C 和 D 作答)

- (A) 某人只能看到自己 l 公分的整張臉；
- (B) 某人除了可以看到長度為 l 公分的整張臉，還可以看到臉下方 15 公分的上半身；
- (C) 某人除了可以看到長度為 l 公分的整張臉，還可以看到臉下方 d 公分的上半身；
- (D) 某人除了可以看到長度為 l 公分的整張臉，還可以看到臉下方 l 公分的上半身。

二、一束單色雷射光穿過三層不同固體材料的路徑如右圖 1，其路徑如箭頭線段所示，其中材料的折射率由上而下分別是 n_1 、 n_2 、 n_3 ，光線和垂直界面虛線的夾角則分別為 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 ，且兩虛線相互平行。下列哪一個選項無法讓 θ_3 增大？(2)。(單選，以 A、B、C 和 D 作答)

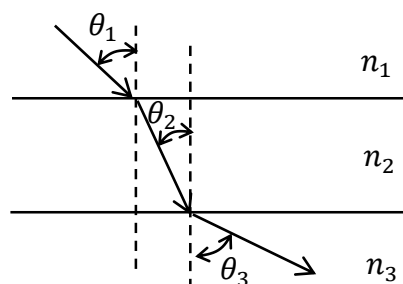


圖 1

- (A) 所有材料的折射率保持不變，增大 θ_1 ，
- (B) 入射角 θ_1 保持不變，增大 n_1 ，
- (C) 入射角 θ_1 保持不變，減小 n_2 ，
- (D) 入射角 θ_1 保持不變，減小 n_3 。

三、一垂直懸吊的理想彈簧，其力常數和原長分別為 k 、 L ；在其下方吊掛一質量 m 、半徑 r 的球體，而使得彈簧伸長。此球受一衝量作用後，使其進行鉛直方向振盪，而振幅 A 是靜止時彈簧伸長量的二分之一。在沒有阻力消耗能量的情形之下，此球體在平衡位置上方 $A/3$ 處的運動速率為 (3)。

四、一輛質量為 M 的賽車在傾斜賽車道上做等速率圓周運動，如圖 2 所示，圓周半徑為 R ，賽道斜面傾角為 θ 。已知賽道與賽車間的靜摩擦係數為 μ_s 。車內之車頂懸掛了一個長度為 l 的單擺，擺錘質量 m (擺錘質量遠小於車體質量)，擺繩以一穩定夾角偏離鉛垂線。

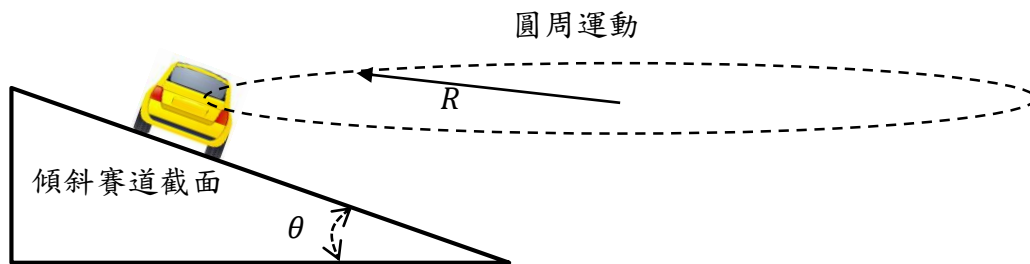


圖 2

(a) 欲維持在此圓周軌跡上行駛，此車可行駛的最大速率為下列何者？____(4)____。

(單選；以 A、B、C 和 D 作答)

(A) $\sqrt{\frac{gR(\sin \theta + \mu_s \cos \theta)}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta}}$, (B) $\sqrt{\frac{MgR(\sin \theta + \mu_s \cos \theta)}{m(\cos \theta - \mu_s \sin \theta)}}$,

(C) $\sqrt{\frac{gRm(\sin \theta - \mu_s \cos \theta)}{M(\cos \theta + \mu_s \sin \theta)}}$, (D) $\sqrt{\frac{gR(\sin \theta - \mu_s \cos \theta)}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta}}$

(b) 當賽車在傾斜賽道上以最大可行速率進行半徑 R 之等速圓周運動時，擺繩與鉛垂線之夾角為____(5)____。

(c) 當賽車在傾斜賽道上以最大可行速率進行半徑 R 之等速圓周運動時，若擺錘受到微擾而輕微左右擺盪，則此擺盪週期為____(6)____。

五、如圖 3 所示，在電子秤上有一個裝有水的容器，秤上的讀數為 500 g。已知將重量為 500 gw 的沉體甲放入該容器時恰好讓水達到滿水位，如圖(a)；又已知將重量為 300 gw 的浮體乙置入容器中也剛好讓水達到滿水位，如圖(b)。將甲和乙物體同時置入容器中再將容器放在電子秤上秤重，如圖(c)；則(a)、(b)和(c)的三種情況下，電子秤讀數的為何？下列正確選項是：____(7)____。(單選；以 A、B、C 和 D 作答)

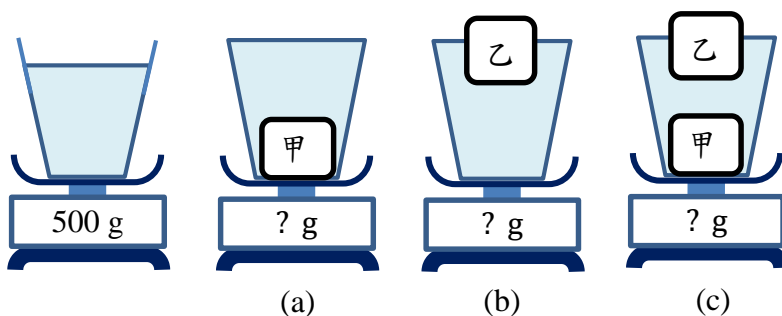


圖 3. 利用電子秤進行各種狀況的測量。

- | | | |
|-------------------|--------------|---------------|
| (A) (a)的讀數為800 g | (b)的讀數為600 g | (c)的讀數為1300 g |
| (B) (a)的讀數為1000 g | (b)的讀數為800 g | (c)的讀數為1000 g |
| (C) (a)的讀數為1000 g | (b)的讀數為800 g | (c)的讀數為800 g |
| (D) (a)的讀數為 800 g | (b)的讀數為600 g | (c)的讀數為1200 g |

已知乙的體積為甲的 2.5 倍，則乙物體的密度是____(8)____g/cm³。

六、重力儲能裝置是一個在離峰用電時、將多餘的電能以重力位能方式儲存的裝置，在需要時再將重力位能轉換而釋放出電能，以提供使用。目前的構想是利用在廢棄礦坑中的重物，用提高坑道重物的位置以達儲能目的，如右圖 4 所示。已知某一個重力儲能測試裝置，重力位能轉換為電能的效率達 90%，重物為 10^4 kg，當由靜止釋放重物時，在某一短暫時間後即可達到穩定等速釋放位能，在此時輸出電能功率恰為 10^6 W，則最接近重物的速度為何下列何者？____(9)____(單選；以 A、B、C 和 D 作答)

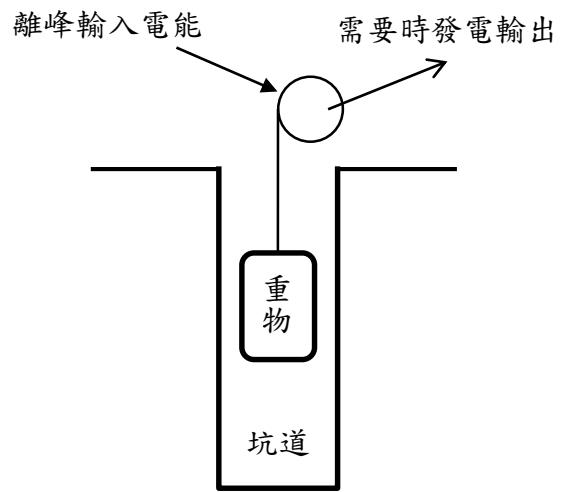


圖 4

(A) 1 m/s (B) 11 m/s (C) 52 m/s (D) 111 m/s。

七、如圖 5 所示，一質量為 $m = 1$ kg、半徑為 $R = 1.0$ m 的剛體圓環最初在光滑水平桌面靜止不動。於時間 $t = 0$ 時，有一個 10 N 的力 \vec{F} 作用於圓環的頂端，使得圓環保持向右直線運動，且不論圓環的如何運動，此力持續作用於圓環的頂端，如圖 5 所示；則 10 秒之後，圓環質心與初始位置的距離為____(10)____公尺，此時 \vec{F} 所做的功為____(11)____焦耳。

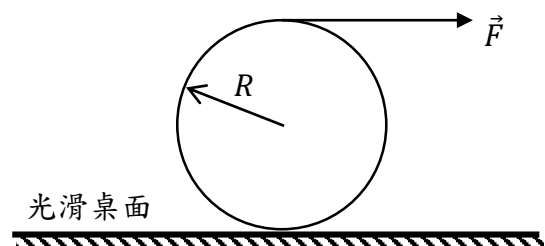


圖 5

八、台北 101 大樓的高層容易受到風力影響而產生擺動，如果擺動太大會使住戶產生不適感，因此為了降低建築物的擺動，裝設了抗風阻尼器，為一類似單擺的金色大圓球。抗風阻尼器的作用是利用加裝的物體(如 101 大樓的金色大圓球)相對大樓之振盪產生

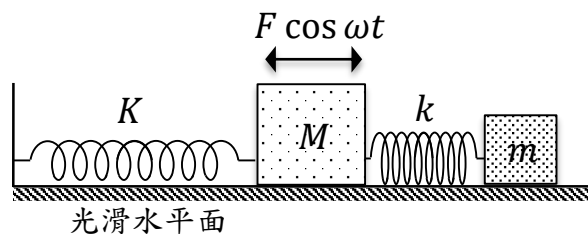


圖 6.

類似阻尼的效果，以降低大樓的擺動。物理上可以如圖 6 所示之彈簧系統來模擬抗風阻尼器的作用；其中以置放在光滑水平面上之質量為 M 與 m 的木塊分別代表大樓(如 101 大樓)與抗風阻尼器(如金色大圓球)，而力常數為 K 與 k 之彈簧則分別用以模擬大樓本身擺動時的恢復力以及阻尼器的恢復力，風力則以 $F \cos \omega t$ 表示，作用

於 M 。若不考慮摩擦力及阻力，當風力的振盪頻率 $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$ 時，如果沒有阻尼器，大樓的擺動振幅將會是無限大！此時如果適當選取抗風阻尼器的振盪頻率，則可以使大樓穩定擺動之振幅最小。試問在已知 K 、 M 與 m 的條件下，使得大樓穩定擺動時振幅最小的 k 為(12)，此時大樓穩定擺動之振幅為(13)。

九、一均勻長圓柱形、長度 L ，質量 m_1 的浮標，下方以質量可忽略的細線連結一質量為 m_2 的小鉛錘，上方停了一隻質量為 M 的蜻蜓，浮標在水中靜止不動。試問當蜻蜓飛離後，浮標上浮過程中的最大速度為(14)。已知浮標的密度 ρ_1 ，水的密度 ρ_w ， $M \ll (m_1 + m_2)$ ，若過程中摩擦力均可忽略，且不考慮蜻蜓飛離浮標瞬間的作用力，即蜻蜓飛離的速度無限小。

十、一個質量為 M 半徑為 R 的均勻圓盤繞其中心轉軸(與盤面垂直)自由轉動，而該中心轉軸垂直固定在無摩擦的水平面上。今在離圓盤中心 $R/2$ 處安裝一小馬達，固定在圓盤上且其質量可忽略，馬達的鉛直轉軸固定安裝在一小圓盤的中心，小圓盤的質量為 m 、半徑為 $R/2$ ，如下圖 7 所示。此二圓盤系統由靜止開始，啟動小馬達使半徑為 $R/2$ 的圓盤的轉速固定為 ω ，此時半徑為 R 的圓盤子的轉速 Ω 應為下列何者？(15) (單選；以 A、B、C 和 D 作答)

【註】：圓盤繞其中心轉軸的轉動慣量 I 為 $I = MR^2/2$ 。

- (A) $\omega m/(4M + 2m)$ (B) $\omega m/(4M)$
(C) $\omega m/(2M + m)$ (D) $\omega m/(2M)$

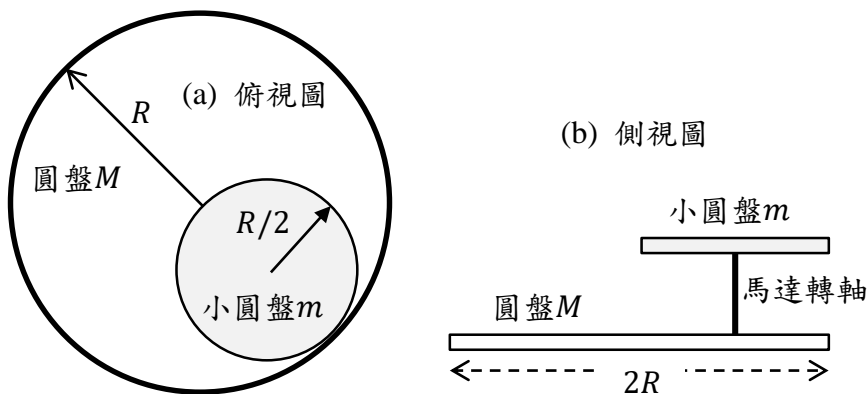


圖 7. 圓盤、馬達和小圓盤系統示意圖：(a) 俯視圖， (b) 側視圖。

- 十一、如右圖 8 所示，一碗形木塊靜止置放在一光滑水平面上，碗型木塊質量為 $2m$ ，內部為一半徑為 R 、原點為 O 之半球面。有一半徑為 r 、質量為 m 之實心均勻小球由碗邊自靜止滾落。假設滾落過程中，小球做純滾動運動，且小球繞球心轉動的轉動慣量為 $\frac{2}{5}mr^2$ ，試問當小球達到碗底最低點時，碗形木塊的速度為 (16)。

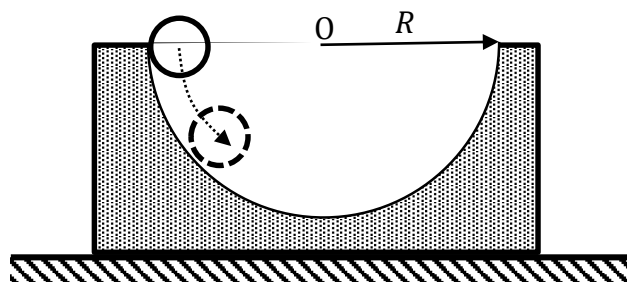


圖 8.

- 十二、在無摩擦的光滑水平桌面上，有一質量為 m 的小球(體積不計)，以 v_0 速度往右垂直射向靜止平放於桌面上之均質細桿尾端，其質量為 M ，長度為 ℓ ；
- (a) 若細桿一端被無摩擦之支點釘住，且細桿可對支點自由旋轉而無摩擦，如圖 9(a) 所示，且小球入射後就黏在細桿的尾端，則此細桿的角速率為 (17)。
- (b) 若細桿沒有被支點釘住，可自由運動，如圖 9(b) 所示；且小球入射後就黏在細桿的尾端，則此時細桿的角速率為 (18)。

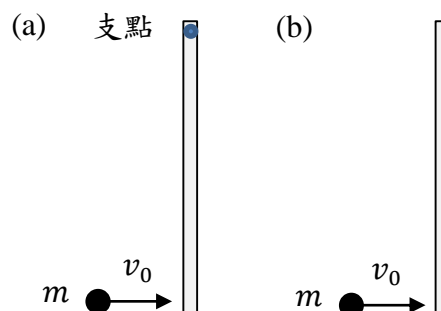


圖 9. (a) 有支點釘住的細桿，(b) 無支點釘住的細桿。

【註】：(1) 細棍對於通過中點之垂直轉軸的轉動慣量為 $\frac{M\ell^2}{12}$ 。(2) 轉動慣量之平行軸定理： $I = I_C + Md^2$ ，其中 I 為質量 M 剛體對一特定轉軸的轉動慣量， I_C 為剛體對於以質心為轉軸的轉動慣量、 d 為該特定轉軸與質心轉軸之垂直距離，且此特定轉軸也與質心軸平行。

十三、 如圖 10 所示，一太空船原先沿著一橢圓軌道繞著一行星運轉，太空船與行星的最近距離為 R ，最遠距離為 $2R$ 。已知太空船在距行星距離為最遠時，其運動速率為 v_0 ；若此時太空船啟動推進器，並進入一半徑為 $2R$ 的圓形軌道，則該太空船在圓形軌道的速率為下列何者？(19) (單選；以 A、B、C 和 D 作答)

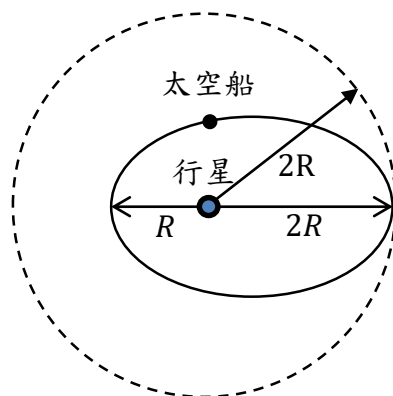


圖 7.

- (A) $\sqrt{\frac{3}{2}}v_0$, (B) $\sqrt{5}v_0$,
(C) $\sqrt{\frac{3}{5}}v_0$, (D) $\sqrt{2}v_0$ 。

十四、 有一種探尋黑洞的方法是觀測雙星系統的運動規律，並從中推測黑洞的質量等性質。雙星模型的主要假設為：在遠離其他天體的空間中，兩顆距離較近的天體圍繞著二者中心連線上的系統質心作等速率圓周運動，兩顆天體的角速率相等，且二者間之距離維持不變，並為兩天體作等速率圓周運動的軌道半徑和；如圖 11 所示。

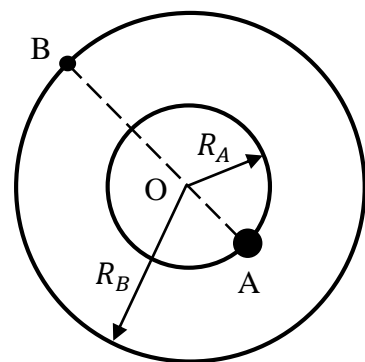


圖 11

(a) 已知 A 星體是一個質量為 m_A 、半徑為 r_A 的黑洞，而 B 星體是一個質量 m_B 、半徑為 r_B 的發光星體，且地球恰好在此雙星相互繞行運動的平面上。在地球上所觀測到發光星體的發光強度與時間的關係，如下圖 12 所示。已知此雙星系統軌道半徑遠大於雙星星體的半徑，即 $R_A, R_B \gg r_A, r_B$ ，但遠小於兩星球與地球的距離；則由圖 12 判斷雙星的半徑比 r_B/r_A 為下列何者？(20)。(單選；以 A、B、C 和 D 作答)

- (A) $\frac{t_a}{t_b}$ (B) $\frac{t_b}{t_c}$

- (C) $\frac{t_e - t_a}{t_e - t_d}$ (D) $\frac{t_b - t_a}{t_c - t_a}$

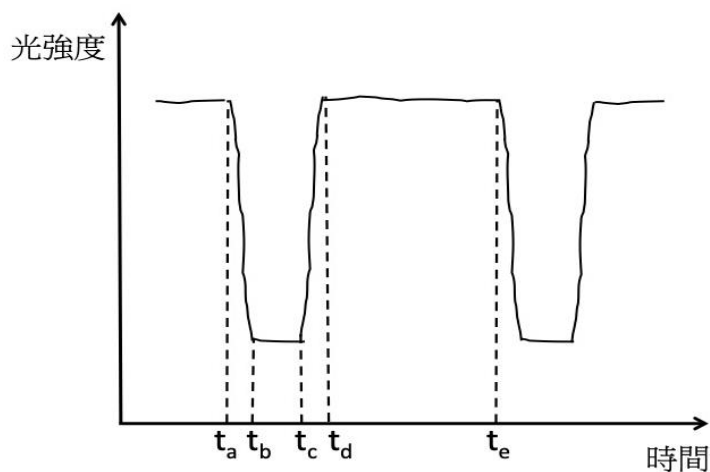


圖 12.

(b) 設重力常數為 G ；則雙星的相對運動速度大小為 (21)。

(c) 若發光星體 B 的速率為 $v_B = 2.7 \times 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ，運行週期 $T = 4.7\pi \times 10^4 \text{s}$ ，質量 $m_B =$

$6m_S$ ，其中 $m_S = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ 為太陽的質量，重力常數 $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$ ，

則該黑洞 A 的質量約為太陽質量的 (22) 倍。(取整數)

十五、考慮一個單原子理想氣體，若以 p 、 V 與 T 分別代表氣體之壓力、體積與絕對溫度，以 k_B 代表波茲曼常數，以 m 代表氣體每個分子的質量，以 n 代表氣體分子的莫耳數，以 R 代表通用氣體常數，則此氣體每單位質量的定容熱容(即其定容比熱)為何？(23) (單選；以 A、B、C 和 D 作答)

- (A) $\frac{3pV}{2T}$ (B) nR (C) $\frac{3}{2}R$ (D) $\frac{3}{2} \frac{k_B}{m}$

現在考慮一可壓縮的單原子理想氣體，在不受任何超距力(包括重力)的作用下，以絕熱方式穩定流動，在流速為 v 處，氣體之壓力為 p ，密度為 ρ 。已知穩定流動時，此氣體在流線上各點的 $\frac{1}{2}v^2 + a(p/\rho)$ 均相等，則式中的係數 a 為(24)。(提示：若視氣體為不可壓縮時，則其內能不會改變，因此會得到 $a = 1$ ，因為能量守恆式中不會將內能加入考慮。)

十六、太空中裝有氫氣的密封圓柱形容器以等加速度 a ，沿著圓柱軸向作直線運動；而此等加速度運動會使得圓柱形容器兩端氣體分子數密度(即每單位體積的分子數目)呈現些微差異。若氫氣可以視為理想氣體，且管長為 $\ell = 100 \text{ cm}$ ，管中氣體溫度恆定維持在 $T = 330 \text{ K}$ 。在某直線加速度作用下，圓柱管兩端氣體分子數密度的差異為 0.1% ，而此差異會造成該圓柱管兩端壓力也有些微差異，則兩端壓力差異為(25)%(以百分比表示)；又氫氣的分子量約為 40 g/mole ，則圓柱管的加速度為(26) m/s^2 。

提示：地表面重力場中空氣分子數密度遵循波茲曼分布定律： $n(h) = n_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$ ，其中 $n(h)$ 為高度為 h 處分子數密度(單位體積中的分子數)， n_0 為地表處分子數密度， M 為空氣的平均莫耳質量， g 為重力加速度， $R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ 為氣體常數。

十七、外太空中一質量為 m 、表面積為 A 、絕對溫度為 T_0 的實心球狀物體，對外以熱輻射的方式降溫。球的單位質量的比熱為 c ，若不考慮吸收其他熱源的輻射熱，且球可以視為黑體，則當球的溫度降為原來溫度的十分之一，需費時(27)。

【註】：若一物體表面的絕對溫度為 T ，發射率為 e ，則該物體表面每單位面積在每單位時間內所輻射出的電磁波能量，稱為輻射能通量密度， $J = e\sigma T^4 (\text{Js}^{-1}\text{m}^{-2})$ ，式中 $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} (\text{Js}^{-1}\text{m}^{-2}\text{K}^{-4})$ ，稱為史特凡-波茲曼常數。通常 $e < 1$ ，但對黑體而言， $e = 1$ (即為完全輻射)。

積分公式： $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ，其中 C 為常數，視積分上下限而定。

十八、有一個質量為 m 、力常數為 k 的非理想均質彈簧。將此彈簧的左端固定、右端則

掛上質量為 M 的質點，並讓質點在光滑的水平面上做週期運動，其振盪頻率為 ω_1 。
 已知當 $M \gg m$ 時， ω_1 滿足方程式： $k\omega_1^{-2} = M + m/3$ (準確到 m 的一階)。今將同樣的
 彈簧兩端都掛上質量為 M 的質點，若其振盪頻率為 ω_2 ，則 $k\omega_2^{-2} = \underline{\hspace{2cm}} (28) \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 接著考慮將同樣的彈簧左、右兩端分別掛上質量為 M_a 、 M_b 的質點，若其振盪頻率
 ω_3 滿足 $k\omega_3^{-2} = \left\{ \frac{\alpha_0 M_a^2 + \alpha_1 M_a M_b + \alpha_2 M_b^2}{(M_a + M_b)} \right\} + \left\{ \frac{m(\beta_0 M_a^2 + \beta_1 M_a M_b + \beta_2 M_b^2)}{(M_a + M_b)^2} \right\}$ ；其中第一項是 $m = 0$
 的結果，而第二項是因為彈簧質量 m 所造成的修正項；因此可以用因次分析及之前
 的結果，分析出 $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = \underline{\hspace{2cm}} (29) \underline{\hspace{2cm}}$ ， $(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = \underline{\hspace{2cm}} (30) \underline{\hspace{2cm}}$ 。

計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

一、噴泉水柱

由兩個相同的空心圓柱罐和一個圓柱杯黏合成一個垂直堆疊的噴泉系統，如圖 13 所示。空心圓柱罐的高度為 H ；且截面積與圓柱杯相同。在杯和罐黏合處、和罐與罐黏合處都鑽有兩個孔洞，並將三隻玻璃吸管 A、B、C，插入堆疊的系統。A 吸管的長度為 h ，由杯連接至下方第一個圓柱罐接近底部，同時高出杯的水面可以噴水。B 吸管由杯的底端連結到下方第二個圓柱罐接近底部的位置。C 吸管連接兩個圓柱罐，開口都是在罐中的空氣部分，所以 C 管中都是空氣。除了 A 吸管上方與大氣接觸外，整個系統都是密閉的，但是各容器中的初始的水位高度分別為 W_0 、 W_1 與 W_2 。假設黏滯效應可以忽略，且罐和杯容器的截面積遠大於吸管的截面積；在 A、B 吸管中保持有水狀況，且管中沒有氣泡，吸管 A 初始時下端為封閉，開啟後會噴水。已知大氣壓為 P_0 ，水的密度為 ρ ，重力加速為 g ；則

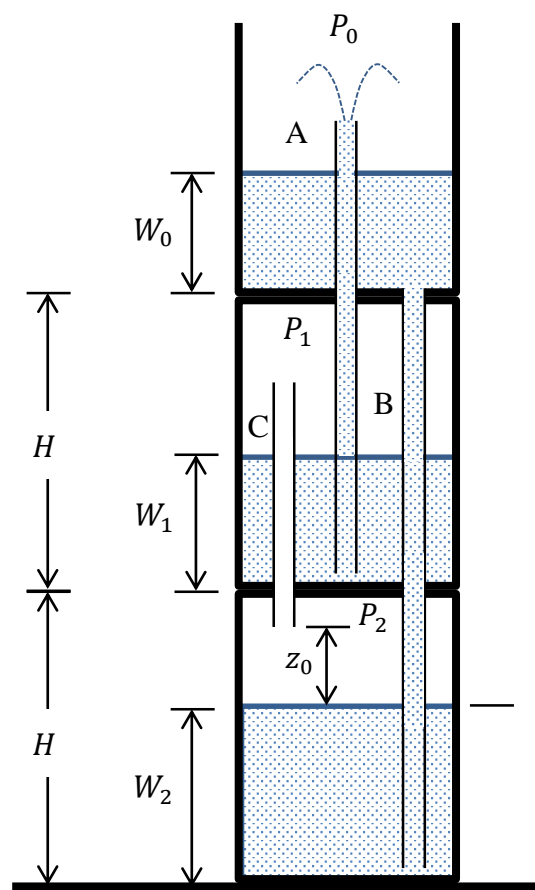


圖 13

- 當吸管 A 的下端被封閉時，則吸管 C 上、下兩端的空氣壓力 P_1 和 P_2 各為何？(3 分)
- 當吸管 A 的下端被開通時，水自吸管 A 的上端噴出，求最初噴出水柱所能到的最高點，與吸管 A 管口的距離。(4 分)
- 因為噴出的水全部都流入圓柱杯和最低的圓柱罐；當噴水停止時，最下方圓柱罐的水位仍在吸管 C 底端之下。設最初吸管 C 的底端與水面的距離為 z_0 ，當噴泉停止時，兩者的距離改變為 $z_0 - \Delta z$ ，求 Δz 表示式。(4 分)
- 假設噴水過程整體系統保持溫度不變，罐中空氣可以視為理想氣體；則當噴水停止時，中間圓柱罐的水位為何？(4 分)

二、推動木塊

一個均質的長方體木塊，重量為 W ，厚度為 $2b$ ，高度為 h ，最初靜置於水平桌面上(如圖14)；木塊底部與桌面之間的靜摩擦係數 $\mu_s < b/h$ ，動摩擦係數 $\mu_k < \mu_s$ 。今垂直於木塊右側表面的頂邊，於其寬度中點處對木塊施一水平向左、量值固定為 F 的定力。

- (a)若此木塊受到定力 F 作用會向左滑動，但不會轉動的條件為何？(寫出相關方程式，並註明相關的物理量)並求出定力 F 的量值範圍為何？(寫出 F 範圍的不等式，以 b 、 h 、 W 、 μ_k 和 μ_s 等表示之。)(9分)

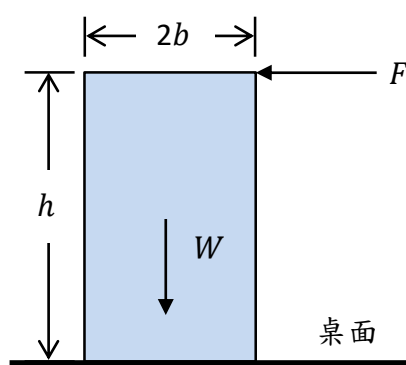


圖 14

- (b)若在此木塊已向左滑動後，對木塊施一量值固定為 F' 的水平定力，且 F' 的施力點、作用線與方向，均與上述定力 F 相同，而木塊不會轉動，但可以不停地向左滑動，則水平力 F' 的量值範圍為何？(寫出 F' 範圍的不等式，以 b 、 h 、 W 和 μ_k 等表示之。)(6分)

2022 年第 22 屆亞洲物理奧林匹亞競賽及
第 52 屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2021 年 11 月 6 日

13：30~16：30

考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

- 1、本試題包括選擇填充混合題三十格及計算題兩大題，合計總分為 150 分。
- 2、選擇填充混合題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
- 3、計算題部分，請在答案卷指定之位置作答。
- 4、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。
- 5、限以藍色或黑色原子筆作答。

常用到的數學公式(t 為時間, x 為任意物理量)

$$1. f'(x) \equiv \frac{df}{dx}, \quad f''(x) \equiv \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right);$$

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x}{dt^2}.$$

$$2. \frac{d}{dx}(ax+b)^m = ma \cdot (ax+b)^{m-1}; \quad \frac{d}{dx} \ln(ax+b) = a \cdot (ax+b)^{-1};$$

$$\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}; \quad \frac{d \sin(ax)}{dx} = a \cos(ax); \quad \frac{d \cos(ax)}{dx} = -a \sin(ax)$$

$$3. \int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a} + C, \quad m \neq -1; \quad \int (ax+b)^{-1} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C;$$

$$\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C; \quad \int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + C,$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C; \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C. \quad (\text{在此, } C \text{ 為一個常數})$$

$$4. \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$5. \text{當 } |x| \ll 1, \quad (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x,$$

$$e^x \approx 1 + x, \quad \sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}.$$

2022 年第 22 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 52 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題

※本試題含選擇填充混合題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

壹、 選擇填充混合題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

- 一、如圖 1 所示，一摺紙螺旋槳，旋轉半徑 r ，重量 W ，自高度 h_0 在密度為 ρ 的靜止大氣中垂直下落。假設該摺紙螺旋槳下落後，即很快達到終端速度，隨後其飛行時間 T 與其他相關物理量的關係可以下式表示

$$T = kh^\alpha r^\beta \rho^\gamma W^\delta$$

其中 k 為一未知的無因次常數， h 為下落距離， α 、 β 、 γ 、 δ 分別為待決定的相關物理量的冪次，則下列選項何者正確？答：____(1)____。

(A) $\alpha = -1$

(B) $\beta = 0$

(C) $\gamma = -\frac{1}{2}$

(D) $\delta = \frac{1}{2}$

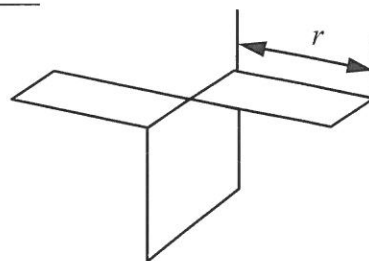


圖 1

- 二、一容器內含 n 莫耳單原子理想氣體，已知其在一可逆絕熱過程中，外界對該氣體作功 W 。若該氣體的起始溫度和壓力分別為 T_i 和 P_i ，則其最終壓力 P_f 為何？____(2)____。(以 n, W, T_i, P_i 和氣體常數 R 表示。)

- 三、如圖 2 所示為一內裝有水、半徑為 R 之柱形圓桶之側視圖，其中水面上裝有一活塞且活塞中心有一半徑為 a 之小洞，設重力加速度為 g 、水的密度為 ρ 、活塞的質量為 m ，某生施力使活塞以向下速度 v 運動而試圖將水擠壓成水柱向上噴出，試估算水柱能達到的最大高度為 ____ (3) ____。

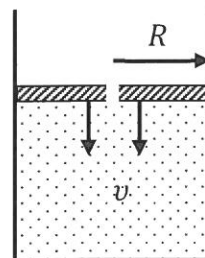


圖 2

四、已知原長 $\Delta\ell$ 之任一小段彈簧伸長為 $\Delta\ell'$ 所需施加的外力為

$\Gamma \frac{\Delta\ell'}{\Delta\ell}$ ，其中 Γ 為楊氏係數。今將一質量為 m 、原長為 L 之彈簧垂直懸掛達平衡後如右圖 3 所示，若將懸掛前之彈簧上的位置可以用座標 x 描述，則 $0 \leq x \leq L$ ，懸掛後原先位在 x 處的 A 點向下的位移為 y ，試問 A 點附近一小段原長 Δx 之彈簧懸掛後之長度，即原長 Δx 的位移差 Δy 為
 _____ (4) _____，懸掛後的彈簧總長度為 _____ (5) _____。

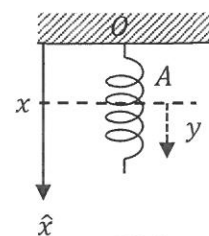


圖 3

五、50 多年前的台灣，雜貨店的冷藏設備未普及，將牛乳均質化 (homogenization 讓脂肪粒子變小) 的技術也尚未被鮮乳廠廣為採用，玻璃瓶裝鮮乳多是由專人在凌晨送至訂購戶家門口信箱旁的鐵盒裡。在旭日升起後，溫度與時間常會使得鮮乳呈現油水分離的狀態：密度較低的乳脂會上浮集中到接近瓶口內徑較小的地方，如圖 4。假設發生油水分離不會影響整個液體的體積。發生油水分離前後，牛乳瓶底部的壓力分別為 p_{mix} 與 p_{sep} ，那麼這兩者之間的關係是
 _____ (6) _____。

- (A) $p_{\text{mix}} > p_{\text{sep}}$
- (B) $p_{\text{mix}} < p_{\text{sep}}$
- (C) $p_{\text{mix}} = p_{\text{sep}}$
- (D) 資訊不足，無法判斷。



圖 4

出處 clipartof.com/1264185

六、兩位質量相同（連同裝備各 100 kg）的太空人在太空中漂浮。兩人各自握著同一根長 10 m 的直長桿（質量可忽略）的不同端，繞著系統（兩太空人加上長桿）的質心，做週期為 10π 秒的旋轉。在無外力作用下，兩太空人手握著長桿慢慢地（避免手握處有滑動）互相靠近，停在兩人距離為 5 m 的狀態。（以下兩小題可採用將太空人視為質點的模型來近似）試問：

- (a) 此時太空人繞著系統質心的速率變成 _____ (7) _____ m/s。
- (b) 過程中系統的轉動動能改變了 _____ (8) _____ J。

七、密度為 ρ 的氣體以垂直於斜面的速度 v 撞擊一楔形體的斜面（斜面面積為 A ，楔形體質量為 m ，如圖 5。）。假設此撞擊為完全非彈性碰撞。若楔形體在水平桌面上保持不動，請問楔形體與桌面之間的靜摩擦係數最小須為多少？

答：_____ (9) _____。

（重力加速度值為 g ，假設氣體質量遠小於楔形體。）

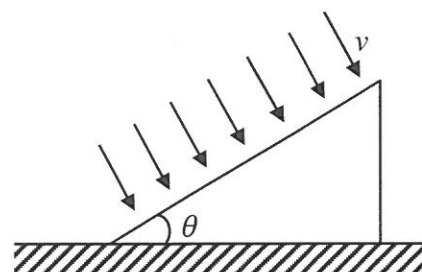


圖 5

八、一均質圓盤沿一固定不動的斜面「純滾動」滾下，觀察其滾至斜面低點 A 處（不觸及底面，如圖 6）的運動。下列敘述何者正確？答：_____ (10) 。

- (A) 在圓盤質量固定的情況下，若圓盤半徑越大，則圓盤滾至斜面低點 A 處時的速度越大。
- (B) 在圓盤密度固定的情況下，若圓盤半徑越大，則圓盤滾至斜面低點 A 處時的速度越大。
- (C) 在純滾動的前提下，斜面傾角越大，圓盤所受之摩擦力越大。
- (D) 圓盤純滾動至斜面低點 A 處所獲得的動能，比在光滑無摩擦力的斜面上滑至低點 A 處所獲得的動能還要小。

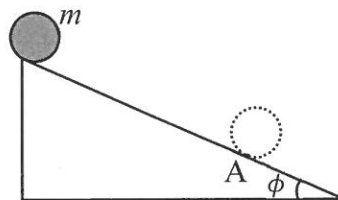


圖 6

九、承上題，已知圓盤質量 m ，半徑 r （故圓盤對垂直盤面穿過圓心的轉軸的轉動慣量為 $\frac{1}{2}mr^2$ ），斜面傾角為 ϕ 。為避免圓盤滾下時滑動，請問其與斜面間的靜摩擦係數須滿足什麼條件？（已知重力加速度值為 g 。）答：_____ (11) 。

十、滑輪之彈簧懸吊系統：一理想彈簧串接一細線並連結一圓盤滑輪外緣，裝置如圖 7 所示之初始平衡狀態；其中彈簧的力常數為 k ，滑輪的質量為 m ；半徑為 R 。設重力加速度為 g ，當施以一向下瞬間的衝量，使得滑輪進行上下小幅振動，若細線與滑輪的接觸點之間沒有滑動，則此振盪的週期為 _____ (12) 。

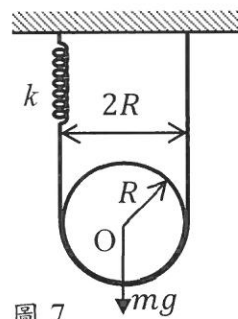


圖 7

十一、一質量 m 的物體由一條長 L 的細繩懸吊在天花板，在和鉛垂線夾 θ 角的位置從靜止開始擺動，擺盪到最低點時恰好和固定在桌面上且質量為 M 的物體碰撞並反彈 ($M \gg m$)。在第 n 次碰撞、反彈之後， m 運動的最遠端和鉛垂線夾 α 角， $\alpha < \theta$ 。

每一次碰撞 m 反彈瞬間的速度 v 和撞擊瞬間的速度 u 的比值稱為恢復係數 ϵ ， $\epsilon = \frac{v}{u}$ ，

則在運動過程中細繩都維持緊繃，忽略空氣阻力、懸掛點的摩擦力、細繩的質量的情況下， n 次碰撞的平均恢復係數的絕對值 $|\epsilon| =$ _____ (13) 。

十二、太空梭返回地球時在大氣中高速飛行，速率為 v ，此速率遠大於空氣分子的移動速率。若太空梭受到的空氣阻力，只是因為空氣分子撞擊太空梭所造成，則此阻力會正比於 _____ (14) 。

- (A) $v^{0.5}$ (B) v (C) $v^{1.5}$ (D) v^2

十三、一艘消防船所配置的水泵在靜止的水面下，水泵的進水口與出水口具有相同的截面積。水經水泵加壓後從高於水面 $H = 3.00 \text{ m}$ 的噴嘴，射出直徑 $d = 5.00 \text{ cm}$ 的水流。忽略各類能量損失，水泵需要提供的壓力差為 (15) MPa。若從噴嘴射出的水流速率為 $v = 30.0 \text{ m/s}$ ，則水泵必須提供的功率為 (16) kW。取重力加速度 $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ ，水的密度 $\rho = 1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。

十四、一個簡單的回音實驗如圖 8 所示，其中儀器 A 會使空氣振動產生超聲波，此超聲波再經由前方兩端開口的細圓管進行共振而將第二諧音的強度放大，偵測器 B 則包含高指向收音裝置和頻譜分析儀。若偵測器 B 在儀器 A 啟動之後的時間 t 開始測到自牆面反射訊號，且細圓管長度為 L ，細管管口和儀器 B 的直線距離是 $2d$ ，則儀器 A 的振動頻率 $f =$ (17) 時，偵測器 B 會測量到最強的訊號。

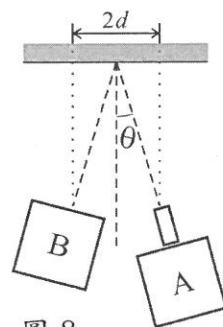


圖 8

十五、一個熱氣球的氣囊，可近似為中空之圓球形絕熱薄壁剛體，容積固定為 $V_0 = 400 \text{ m}^3$ ，此氣囊除底部有一通向大氣的開口外，其餘部分密閉不漏氣。不包括囊內空氣時，氣囊和熱氣球其他部分(包括燃燒器、人員與載物)的總質量為 $m = 200 \text{ kg}$ 。假設氣囊內、外的空氣，都可視為雙原子理想氣體，且其最初的溫度 $T_0 = 283 \text{ K}$ ，壓力 $P_0 = 101 \text{ kPa}$ ，質量密度為 $\rho_0 = 1.25 \text{ kg/m}^3$ 。若囊內充滿密度為 ρ_f 的熱空氣時，熱氣球剛好懸浮而可以開始升空，則密度 $\rho_f =$ (18) kg/m^3 。
為了加熱囊內空氣，在氣囊中心處，以燃燒器加熱囊內溫度為 T_0 的空氣。假設囊內、外空氣壓力固定為 P_0 ，且囊內空氣受熱膨脹後往囊頂上升，在足夠短的時間內均勻充滿氣囊，以致囊內冷、熱空氣之間的熱交換可忽略，而囊內未被加熱、溫度為 T_0 的冷空氣則下沉，經由氣囊底部開口離開。已知當整個氣囊均勻充滿溫度為 T_f 的熱空氣時，若將燃燒器關閉，則熱氣球正好懸浮而可以開始升空。依據上述，絕對溫度 T_f 為 (19) K，燃燒器經由熱轉移，提供給囊內空氣的能量為 (20) J。

十六、一個半徑 r 的圓柱型容器盛裝絕對溫度 T_2 的液體，液體的汽化熱為 L 、發射係數為 e 、液面起始高度為 H 。當環境的絕對溫度穩定維持在 T_1 且 $T_1 > T_2$ ，則液體必須部分汽化才能將溫度維持在 T_2 。在忽略容器的吸、放熱，且環境和液體只透過輻射進行熱的傳遞的情況，則液面在高度 h 的瞬間，其高度變化率為 (21)。

註：物體在絕對溫度 T 時的熱輻射功率 $P = e \sigma A T^4$ ，其中 σ 是常數、 A 是物體的表面積。

十七、 在某透明水溶液中，一單頻光的傳播速率隨水溶液的密度變高而連續遞減。今以透明之均勻平板薄片組成的長方體容器，盛裝此水溶液，當容器靜置於水平桌面上後，發現水溶液的密度由下而上隨高度連續遞減。若將上述單頻光的平行光束甲與乙，如圖 9 所示分別沿垂直與水平方向射入水溶液中，則下列敘述何者正確？

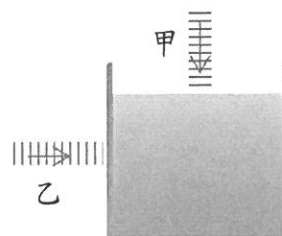


圖 9

答：_____ (22) _____。

- (A) 兩光束均不偏向
- (B) 甲光束會向左偏
- (C) 甲光束會向右偏
- (D) 乙光束會向上偏
- (E) 乙光束會向下偏

十八、 兩個絕熱良好的密閉容器，以絕熱隔板分開，兩氣室內裝有單原子氣體分子理想氣體，其起始的壓力、體積與溫度如圖 10 所示。氣體與容器、隔板的熱交換可忽略。考慮隔板移走後，氣體達平衡後內能為_____ (23) _____。

P	T	$3P$	$4T$
V		$2V$	

圖 10

十九、 銀河的中大部份的恆星集中在距銀河中心半徑為約為 10000 光年內，總質量為 M ，銀河邊緣星體密度相當稀薄，太陽離銀河中心距離約 $R_0=27000$ 光年。根據牛頓重力理論，質量為 m 。距離銀河中心為 r 的邊緣星體所受重力為 $F = \frac{GMm}{r^2}$ ， G 為重力常數。試求邊緣星體繞行銀河中心速度 $v =$ _____ (24) _____。

已知觀測到的銀河系中恆星繞行銀河中心作圓周運動的速度，與距銀河中心距離的關係如圖 11 所示，遠離銀河中心的恆星，其速度呈現一個定值 V_0 ，圖中的星號標記太陽的位置。理解這個速度分佈的可能性如下：

(i) 有人提議在物體加速度 a 非常小時，例如銀河邊緣星體繞行銀河中心的情形下，修改牛頓第二運動定律的形式為

$$F = m \frac{a^2}{a_0}; \quad a_0 \text{ 為一未知常數。請依此修改的}$$

牛頓第二運動定律，求星體繞行銀河中心速度 $v =$ _____ (25) _____。

(ii) 也有人認為銀河系裡存在著許多不發光的物質，稱為暗物質 (dark matter)，銀河系浸在以銀河系中心為球心、球形分布的暗物質暈裡 (dark matter halo)。根據這個假設，試推測太陽系中暗物質的密度為 _____ (26) _____。

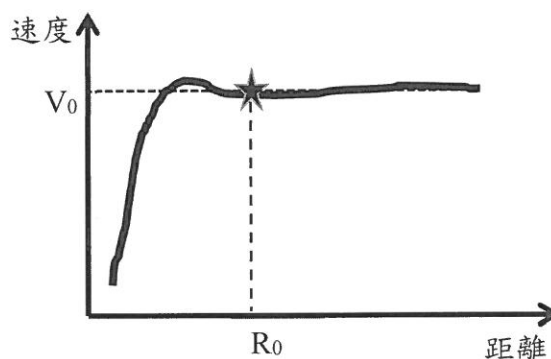


圖 11

二十、考慮一斷崖式海岸，長而且直的海岸線連接上的海域為等水深的深海域，海水的深度為 H 。今有來自陸地的地震波（S-波，上下震動）正向朝向海岸線行進，考慮在海中所產生的水波。我們只考慮岸邊震動對海水的影響，忽略地震波在海床對海水的影響，同時所考慮的震動頻率， $\lambda \ll H$ 的條件成立，使得海水水波的速率 v 與波長 λ 的關係為

$$v = \sqrt{g\lambda/(2\pi)}。$$

此處 g 為重力加速， x 為離岸距離，描述海水水波高度差的 $f(x, t)$ 表示在位置 x 處時間 t 時，水面高度與平衡的水面高度的差值。

(a) 若地震波維持一段長時間，使岸邊的水波為穩定波動 $f_0(0, t) = A \cos(\omega t)$ ，試求 $f_0(x, t) =$ _____ (27) 。

(b) 若地震波維持一段長時間，使岸邊水波的穩定波動為

$f(0, t) = 2A \cos(\omega t) + A \cos((\omega + \Delta\omega)t) + A \cos((\omega - \Delta\omega)t)$ ，且 $\Delta\omega \ll \omega$ ，則 $f(x, t)$ 可寫為 $f(x, t) = f_0(x, t) F(x, t)$ ，試求 $F(x, t) =$ _____ (28) 。

二十一、如圖 12 所示，考慮 4 個質量為 M 、長度為 L 的均勻長方形積木，在積木可保持平衡的前提下，當 $x = x_1 + x_2 + x_3$ 為最大時，求 $x =$ _____ (29) 。

如果在最上層積木的右端放置一個質量為 m 的質點，在積木仍然能保持平衡的前提下，如圖 13 所示，當 $x = x_1 + x_2 + x_3$ 為最大時，求 $x =$ _____ (30) 。

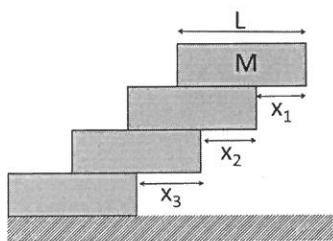


圖 12

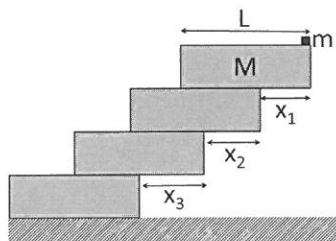


圖 13

貳、 計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

一、在大氣層上方離地表約 200 km 處運行的人造衛星，因空氣阻力使該人造衛星將無法維持其力學能守恆的條件。若衛星所受的空氣阻力 \vec{F} 與其運行速度 v 之關係，可表示為： $\vec{F} = -k\vec{v}$ ， k 為一數值為正的係數，可近似為： $k \approx S\rho v$ ，其中 S 為衛星的截面積， ρ 為該處的空氣密度。現假設一球狀衛星在距離地球表面 $h = 160$ km 處，以圓形軌道運行。衛星的質量 $m = 100$ kg，截面積 $S = 1$ m²，且該處的空氣密度 $\rho = 10^{-9}$ kg/m³。

試問：

(a) 該衛星當時因受空氣阻力而造成的加速度(a_t)量值，與其向心加速度(a_r)量值的比值 a_t/a_r (7 分)

(b) 假設衛星的運行軌道在空氣阻力作用下，雖然半徑與速率可能隨時間改變，但在任何時刻仍可視為是以圓形軌道運行，試導出衛星速度隨時間的變化 $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ 與人造衛星速度 v 的關係。(8 分)

(已知地球的質量 $M = 5.98 \times 10^{24}$ kg; 半徑 $R = 6371$ km; 重力常數 $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N $\cdot \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2}$ 。)

二、張拉整體結構 (Tensegrity sculpture)

張拉整體結構是巴克敏斯特·富勒(Buckminster Fuller)創建，用於描述由繩索、電纜等剛性構件組合而成的結構系統。此結構系統會使得看似柔軟的繩子可以撐起物體，讓物體產生懸浮的效果。圖 14 所示為一透過長度 L_1 與 L_2 之細繩使一木塊(以虛線圈起來)懸浮在空中之最簡單的張拉整體結構的側視圖，設水平方向(平行地面)為 x 軸、進入紙面的方向為 y 軸以及鉛直方向為 z 軸，若木塊的質量為 m ，不計細繩的質量，長度為 L_1 與 L_2 之細繩上的張力量值各為 T_1 與 T_2 ，試問

(a) 克服木塊重力造成懸浮之力的量值為何？

(以 T_1 、 T_2 表示)(2 分)

(b) 設 O 點的 x 座標為 x 軸的原點，平衡時木塊質心的 x 座標為 $-x_1$ ，長度 L_2 之細繩繫在地面之點的座標為 x_2 。

(i) 以 x_1 、 x_2 、 mg 表示 T_1 和 T_2 。(4 分)

(ii) 若將木塊質心在 xz 平面上小幅度偏離平衡點後釋放，懸浮木塊之質心將在 xz 平面上平衡點附近進行小幅度振盪，試問振盪的頻率為何？(9 分)

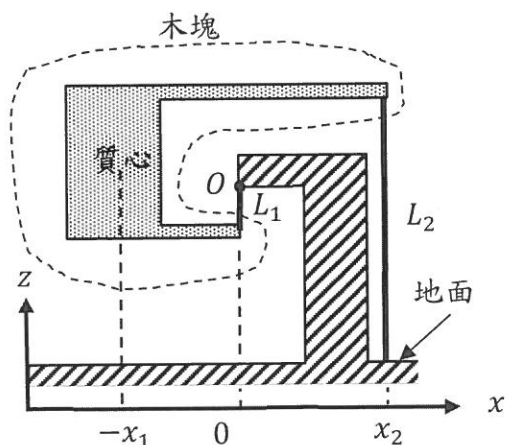


圖 14

2023 年第 23 屆亞洲物理奧林匹亞競賽及
第 53 屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2022 年 11 月 5 日

13 : 30~16 : 30

考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

- 1、本試題包括選擇填充混合題三十格及計算題兩大題，合計總分為 150 分。
- 2、選擇填充混合題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
- 3、計算題部分，請在答案卷指定之位置作答。
- 4、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。
- 5、限以藍色或黑色原子筆作答。

常用到的數學公式(t 為時間, x 為任意物理量) 與 轉動慣量之平行軸定理

$$1. f'(x) \equiv \frac{df}{dx}, \quad f''(x) \equiv \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right);$$

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x}{dt^2}.$$

$$2. \frac{d}{dx}(ax+b)^m = ma \cdot (ax+b)^{m-1}; \quad \frac{d}{dx} \ln(ax+b) = a \cdot (ax+b)^{-1};$$

$$\frac{d e^{ax}}{dx} = a e^{ax}; \quad \frac{d \sin(ax)}{dx} = a \cos(ax); \quad \frac{d \cos(ax)}{dx} = -a \sin(ax)$$

$$3. \int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a} + C, \quad m \neq -1; \quad \int (ax+b)^{-1} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C;$$

$$\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C; \quad \int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + C,$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C; \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C. \quad (\text{在此, } C \text{ 為一個常數})$$

$$4. \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$5. \text{當 } |x| \ll 1, \quad (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x,$$

$$e^x \approx 1 + x, \quad \sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}.$$

$$6. I_n \equiv \int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx, \quad I_0 = \sqrt{\pi}/2, \quad I_1 = 1/2, \quad I_2 = \sqrt{\pi}/4$$

平行軸定理:

設直線 L_{CM} 通過一剛體的質心, 若有一旋轉軸 L 平行於 L_{CM} , 則剛體繞此旋轉軸 L 轉動之轉動慣量 I 可寫為:

$$I = I_{CM} + Md^2$$

其中 I_{CM} 為剛體繞質心旋轉軸 L_{CM} 轉動的轉動慣量, M 是剛體的質量, d 為 L 與 L_{CM} 之間的距離。

2023 年第 23 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 53 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題

※本試題含選擇填充混合題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

壹、選擇填充混合題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

- 一、考慮一個 2.0 公斤的物體，將其放置在桌面上，並用一水平作用力 F 推動此物體，若此物體與桌面間的靜摩擦係數為 0.20、動摩擦係數為 0.15，且此水平推力大小隨時間的變化如圖 1 所示，取重力加速度大小 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ，試問第 (1) 秒時，物體正要

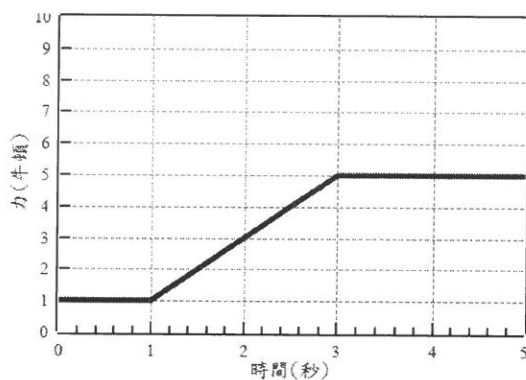


圖 1

由靜止開始運動。

- 二、甲、乙兩個電子式燈泡在使用相同電壓時的耗電功率分別為 10 瓦、20 瓦，而且在使用時，這兩個燈泡的電阻都不會隨著電壓或是電流而改變。在相同電壓下使用這兩個燈泡時，下列敘述何者正確？

- (A) 甲燈泡所需的電流是乙燈泡的兩倍；
(B) 甲燈泡的電阻是乙燈泡的兩倍；
(C) 甲燈泡的發光效能一定是乙燈泡的兩倍；
(D) 當兩燈泡從使用相同電壓改為通過相同的電流，則甲燈泡的耗電功率仍是乙燈泡的一半。答案填入：(2)。

- 三、一端開口一端封閉的細長吸管，對管口吹氣時可產生聲音。若吸管内徑 0.5 cm，管內空氣柱長度 15.0 cm，在常溫常壓下吹氣。以下敘述何者最可能是錯誤的？答案填入：(3)。

- (A) 可能產生頻率約為 570 Hz 的聲音；
(B) 可能產生頻率約為 1140 Hz 的聲音；
(C) 可能產生頻率約為 1700 Hz 的聲音；
(D) 可能同時產生多種共振頻率的聲音。

四、柱狀鈷鐵硼的強力磁鐵沿著一長度為 L 的純銅金屬管中心下落，如圖 2 所示磁鐵置於金屬管上方。已知金屬管半徑僅略大於柱狀磁鐵的半徑，且磁鐵下落的過程中不會和管壁碰撞；在冷次定律的作用下，下降的磁鐵在金屬管長度 L 的範圍內，速率 v 對 x （管內落下的距離）作圖最接近下列何者？答案填入：____(4)____。

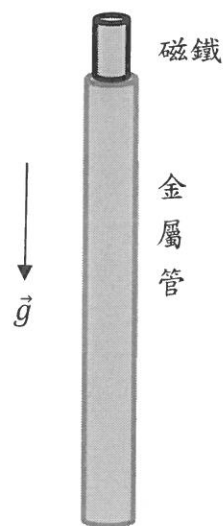
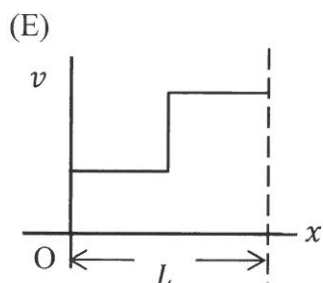
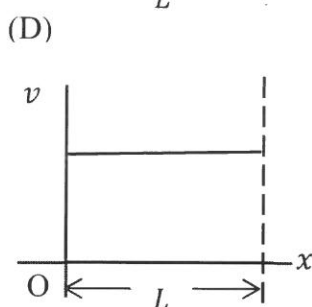
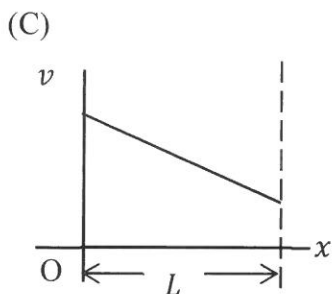
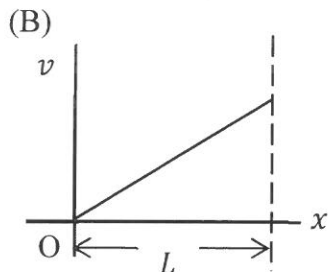
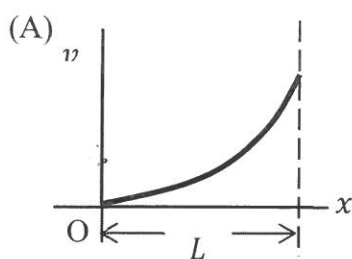


圖 2：磁鐵在純銅金屬管中下落

五、質量均為 m 的兩物體（視為質點）以一均勻的輕彈簧相連結，將此裝置以一細繩垂直懸掛在天花板上，如圖 3 所示。到達靜態平衡時此裝置的長度為 $L+d$ ，其中 L 是彈簧的自然長度， $d = mg/k$ 是因維持底端物體不下掉的彈簧伸長量。底端物體距離地面的高度是 h ，令 $T_h \equiv \sqrt{2h/g}$ 為自由落體從該高度下落到達地面所需的時間。在 $t=0$ 時將懸掛此裝置的細繩剪斷；則：(a) 在細繩剪斷後的瞬間，頂端物體的加速度減底端物體的加速度等於 (5)。（需有量值與方向）



圖 3

(b) 令底端物體碰到地面的時刻為 $t=T$ ，則下列陳述何者是正確的？答案填入：____(6)____。

- (A) $T = T_h$
 (B) 除了少數個別特定的 h 值外，一般情形下 $T < T_h$ 。
 (C) 除了少數個別特定的 h 值外，一般情形下 $T > T_h$ 。
 (D) 依不同 h 值的選擇， $T = T_h$ 、 $T < T_h$ 與 $T > T_h$ 都有可能發生。

- 六、一個固定不動的警報器，發出頻率為 800 Hz 的警報聲。風以 10 m/s 的速率穩定由西向東吹。假設在平靜空氣中的聲速為 343 m/s，而甲、乙兩人以 10 m/s 的速率分別從西側、東側接近警報器，則關於甲、乙偵測到的警報聲，下列敘述何者正確？
答案填入：____(7)____。

【註】：“視”頻率(或“視”波速)是指在觀察者為靜止的座標系中所偵測到的頻率(或波速)。

- (A) 甲偵測到的視頻率為 $800 \times \frac{343}{343-10}$ Hz，視波速為 343 m/s；
(B) 甲偵測到的視頻率為 $800 \times \frac{343+10}{343-10}$ Hz，視波速為 333 m/s；
(C) 乙偵測到的視頻率為 $800 \times \frac{343}{343-10}$ Hz，視波速為 353 m/s；
(D) 乙偵測到的視頻率為 $800 \times \frac{343+20}{343-10}$ Hz，視波速為 353 m/s。

- 七、如圖 4 所示，一質量為 M 的均質繩子，兩端固定在同高的兩個釘子上。在繩中央掛一個質量為 m 的物體，繩中點和釘子處的繩切線方向與鉛垂線夾角分別為 α 和 β ；則 $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$ 等於下列何者？

答案填入：____(8)____。

- (A) $\frac{M+m}{m}$ (B) $\frac{m}{M+m}$ (C) $\frac{M}{m}$ (D) $\frac{m}{M}$

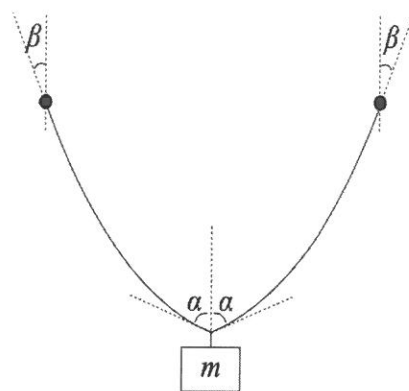


圖 4

- 八、某生去打靶，子彈由槍管以 300 m/s 速度大小射出，若子彈的質量為 1 克，而且子彈在槍管的受力與時間的關係為 $F = 200 - \frac{2}{3} \times 10^5 t$ 。 F 的單位是牛頓， t 的單位是秒，求子彈從 $t = 0$ 秒靜止到射出槍管歷時____(9)____秒。

- 九、(a) 1 莫耳， 0°C 的理想氣體絕熱可逆地膨脹為原體積的 2 倍，其熵變化為____(10)____ J/K。
(b) 1 莫耳， 0°C 的理想氣體等溫可逆地膨脹為原體積的 2 倍，其熵變化為____(11)____ J/K。(取到小數第一位)

- 十、一雙質點彈簧系統有兩個質量皆為 m 的質點，彈簧常數為 k ，如圖 5 所示。考慮碰撞在平滑的水平桌面上進行，且質點皆只有平移運動，沒有滾動的運動。另外，質點 M 以初速 V_0 與質點 m 之間的碰撞視為正向彈性碰撞。雙質點彈簧系統原為靜止，且彈簧並未有拉伸狀態(彈簧自然長度為 l_0)。試求彈簧在碰撞後能達到的最大位能 (答案以 M 、 m 、 V_0 及 k 表示)_____ (12)。

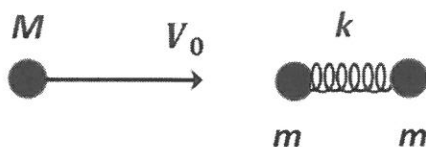


圖 5

- 十一、如圖 6 所示，一不可伸縮、質量可被忽略之繩索掛過一滑輪(質量與摩擦力皆可忽略)，左邊連接上一質量為 $2m$ 之木塊 A，右邊連接上兩質量皆為 m 之木塊 B 與 C，且 B 與 C 之間以一彈力常數為 k 之彈簧相連。今在左右兩邊達靜力平衡後，在 A 與 B 靜止不動情況下，將木塊 C 拉下使將彈簧伸長 y 後，再將整個系統包括木塊 A、B 與 C 釋放使其開始運動，且在運動過程中，繩索維持張緊狀態，試求釋放後彈簧的振盪角頻率，也就是彈簧伸長量 y 隨時間振盪的角頻率等於_____ (13)。

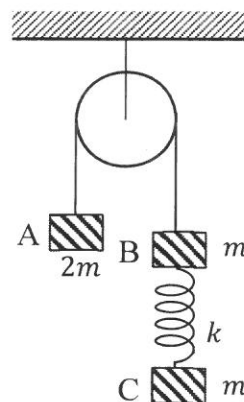


圖 6

- 十二、1 號和 2 號兩種不同的單原子理想氣體分別裝入體積為 V_1 與 V_2 的絕熱容器中，兩容器中間以絕熱的隔板完全隔開，如圖 7 所示。1 號氣體有 n_1 莫耳、壓力為 P_1 ；而 2 號氣體有 n_2 莫耳、壓力為 P_2 。

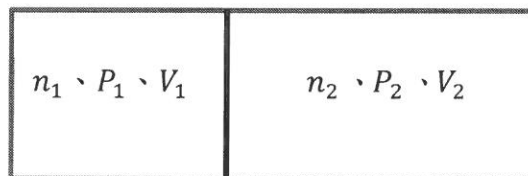


圖 7

- (a) 已知氣體常數為 R ，當絕熱隔板在瞬間移

除，使兩容器合成一個總體積為 $V_1 + V_2$ 的容器，忽略移除絕熱隔板過程中對氣體所作的功；則兩氣體混合達平衡後的溫度 $T_f =$ _____ (14)。

- (b) 若 1 號氣體改為雙原子氣體，2 號仍為單原子氣體，且初始時 $P_1 = P_2 = P$ 。已知本題中氣體 1 的振動動運可以忽略不計。試問兩氣體在絕熱隔板被移除後混合而達到的平衡壓力 P_f ，則 P_f 表達式為下列何者？答案填入：_____ (15)。

- (A) P (B) $P \frac{(5V_1+3V_2)}{(V_1+V_2)} \times \frac{(n_1+n_2)}{(5n_1+3n_2)}$ (C) $P \frac{(V_1+V_2)}{(5V_1+3V_2)} \times \frac{(n_1+n_2)}{(5n_1+3n_2)}$
 (D) $P \frac{(5V_1+3V_2)}{(V_1+V_2)} \times \frac{(5n_1+3n_2)}{(n_1+n_2)}$ (E) $P \frac{(V_1+V_2)}{(5V_1+3V_2)} \times \frac{(5n_1+3n_2)}{(n_1+n_2)}$

十三、 一個兩端封閉的細長管內，裝有總質量為 M 、一莫耳的理想氣體，已知氣體溫度為 T ，氣體常數為 R ，細長管的截面積為 A ；由理想氣體方程式可知某處氣體壓力 P 與該處氣體密度 ρ 成正比。則

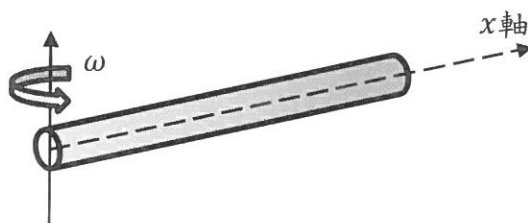


圖 8：封閉的管以 ω 角速度旋轉。

(a) 當管以一端為旋轉軸，在水平面上以等角速率 ω 轉動；如圖 8 所示，沿著管軸心的方向為 x 軸，轉軸位置為 $x = 0$ 。此時管中氣體壓力 $P(x)$ 和密度 $\rho(x)$ 亦為 x 的函數；且在 x 位置的氣體壓力梯度與密度成正比，即 $\frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = \beta \cdot \rho(x)$ ；則 $\beta =$ (16) ；

(b) 已知管的旋轉速率不高時，氣體溫度 T 維持不變；則管中氣體密度分布可以寫為 $\rho(x) = \rho_0 e^{\gamma x^2}$ ，其中 ρ_0 為 $x = 0^+$ 處的密度，求 $\gamma =$ (17) 。

十四、 水平光滑地面上有一質量為 m 的均質立方塊甲，邊長為 d ，自左向右以速率 v 滑行，平面右端有一質量同為 m 的均質立方塊乙，但其邊長遠小於 d ，可視為質點，如圖 9。當甲滑行至乙時，兩者發生碰撞。空氣阻力可忽略，重力加速度為 g ，立方塊繞通過質心且垂直紙面之旋轉軸的轉動慣量為 $\frac{md^2}{6}$ 。假設碰撞過程為完全非彈性碰撞，則在碰撞後的瞬間，甲的角速率為 (18) 。

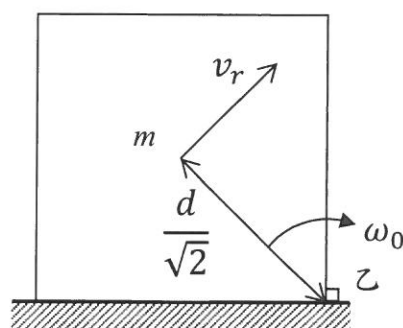


圖 9

十五、 現有一質量為 m 、半徑為 R 、長度為 l 的圓柱體，在斜角為 θ 的長斜面上，以初速 v_0 向上運動，如圖 10 所示。已知圓柱體繞中心軸轉動慣量為 $I = \frac{1}{2}mR^2$ 。考慮下面兩種情況：斜面光滑無摩擦，圓柱體純滑動從開始上坡後回到原位置所需時間為 t_1 。若斜面粗糙，圓柱體做純滾動運動，則同上行程耗時 t_2 。求 t_2/t_1 比值等於 (19) 。

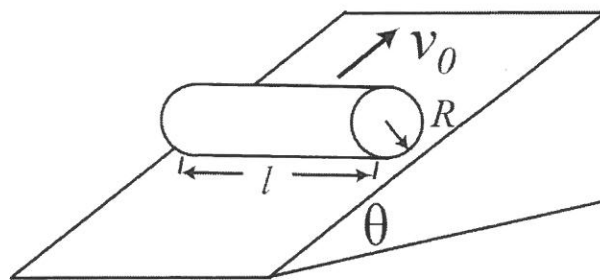


圖 10

十六、 如圖 11 所示，一個溫度保護裝置由兩片金屬板和兩條導線構成。當兩條導線接觸而短路時，就會關閉儀器。此裝置在室溫(絕對溫標) T_0 時，兩導線的長度分別是 L_1 和 L_2 ，間距為 d ，線膨脹係數分別為 a 和 $-b$ ，而 a 和 b 都是正數且不隨溫度改變。若儀器工作溫度 T 的範圍是在低溫 T_L 和高溫 T_H 之間，即 $T_H > T > T_L$ ，則 $T_H =$ (20) _____， $T_L =$ _____ (21) _____。

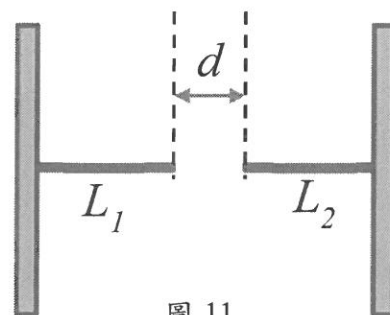


圖 11

十七、 一個用來測重力常數 G 的實驗裝置示意圖如圖 12，由一根細線懸吊一個水平的橫桿及橫桿末端的兩顆小球所構成，細線及橫桿的質量可忽略，小球質量皆為 $m = 5.0 \text{ g}$ ，球心距離細線皆為 $r = 10 \text{ cm}$ ，且小球尺寸遠小於 r 。此一扭擺的水平轉動角度隨時間 t 的變化如圖 13，顯示扭擺微幅的來回擺動，自然擺動週期 T 約為 100 秒。當兩顆質量皆為 $M = 400 \text{ g}$ 的大球在時間 $t \approx 300 \text{ s}$ 時從遠處靠近小球側邊時，大球球心到小球球心的距離為 $d = 2 \text{ cm}$ ，方向與橫桿垂直。因大球 M 對小球 m 施加的重力，使扭擺偏轉了大約 $2 \times 10^{-4} \text{ rad}$ 。

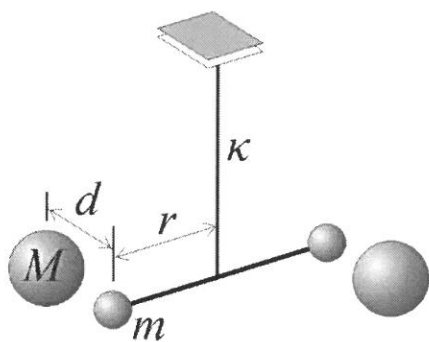


圖 12

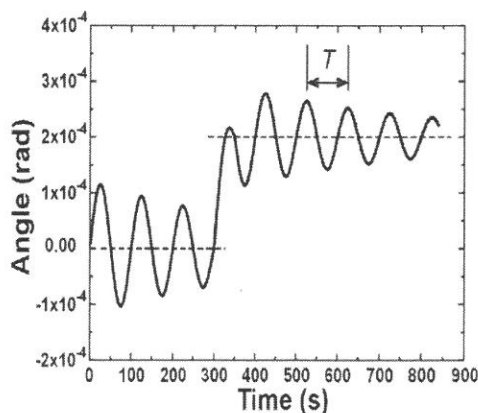


圖 13

- (a) 扭擺受到的力矩 τ 與偏轉角度 θ 的關係可表示為 $\tau = \kappa\theta$ ，其中 κ 為細線的扭擺力常數，試求 $\kappa =$ _____ (22) _____。(以 Nm/rad 為單位)
- (b) 從偏轉的平衡角度變化，試求重力常數 $G =$ _____ (23) _____。(以 Nm^2/kg^2 為單位)

十八、 有一卡車載運一半徑 $R = 1.0 \text{ m}$ ，質量 $M = 1.0 \times 10^3 \text{ kg}$ 的實心球，球與載貨區地板靜摩擦係數為 $\mu_s = 0.4$ 。卡車司機粗心地未將球固定，也沒有把卡車後的板子豎起。若卡車由靜止以等加速度 a 啟動，卡車上的實心球會滾動，但並未滑動。取重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ，實心圓球繞其質心的轉動慣量 $I = \frac{2}{5}MR^2$ 。

試問卡車加速度 a 可允許的最大值為 _____ (24) _____ m/s^2 。

十九、 兩個小行星受重力作用而繞行。假設其質量分別為 M 與 m ，且 $M \gg m$ 。若 m 以正圓軌跡繞行 M ，繞行週期為 700 分鐘，繞行半徑為 1000 公尺；

(a) 若一個質量為 m' 的物體與 m 正面對撞，並使繞行週期變為 690 分鐘。(b) 此時的橢圓軌道半長軸 a 為 (25)。

(b) 接續上題，若 $m' = 500 \text{ kg}$ ，速率約為 6600 m/s ，假設相撞過程為完全非彈性碰撞，無質量噴濺離開小行星；則(c)小行星 m 的質量等於 (26)。

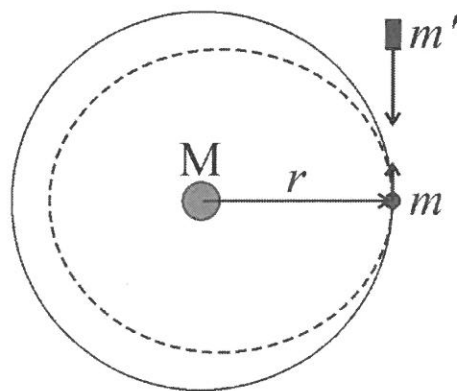


圖 14

【註】：若 m 以橢圓軌道運動，則其在軌道運行速率 $v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$ ，其中 r 為 m 與 M 之間的距離。

二十、 如圖 15 所示，以 \hat{i} 與 \hat{j} 分別代表水平與垂直方向的單位向量。考慮一個重量可忽略的水平圓錐形噴嘴管，其左端入口 A 的截面積為 S_A ，經由流管(虛線部分)接到供水馬達，而右端出水口 B 的截面積為 S_B ，通過流量開關 T 與大氣連通。已知大氣壓力固定為 p_0 ，而水可視為理想流體，密度固定為 ρ ，噴嘴管內水的重量為 $-mg\hat{j}$ 。

(a) 最初開關 T 封閉、AB 段噴嘴管內充滿靜止的水時，入口 A 處的液壓 $p_i = p_0$ ，則為了使 AB 段噴嘴管(含開關 T)保持靜止，除了管內水的液壓作用力之外，其餘作用於噴嘴管的外力之合力 \vec{F} 為何？(27) (以題本所述之物理量符號及 \hat{i} 與 \hat{j} 表示力向量)。

(b) 打開 T 後等到水流穩定時，A 處的流速為 v_A 、液壓為 $p_i > p_0$ ，且水充滿噴嘴管內形成穩流，並以流速 v_B 由出水口 B 穩定排放。若不假設白努利定理一定成立，則為了使 AB 段噴嘴管(含開關 T)保持靜止，除了管內水的液壓作用力之外，其餘作用於噴嘴管的外力之合力 \vec{F}' 為何？(28) (答案以 p_i 、 p_0 、 ρv_A^2 、 ρv_B^2 、 $S_A \hat{i}$ 、 $S_B \hat{i}$ 、 $mg\hat{j}$ 表示)。

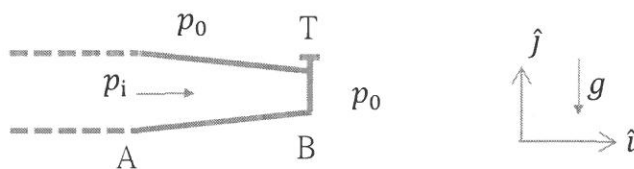


圖 15

二十一、 一根長度為 L 的均質細棒以一端甲為旋轉支點，受一外力自水平以等角速率依順時針方向旋轉，如圖 16。旋轉至某一角度 θ 時，該外力突然消失且細棒的中分點乙處突然斷開，在斷開的過程中，細棒的上下兩截間沒有交互作用力。此後其上半截在相對於該截的質心以順時針方向旋轉了半圈後，其一端（即斷開瞬間時的丙點）恰好接觸到地面的支點甲，在這個過程中，細棒的上下兩截並無接觸。重力加速度為 g 。

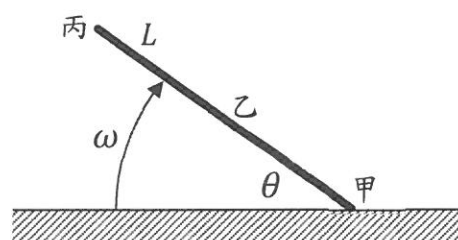


圖 16

試問細棒在斷開時與水平的夾角 θ 為 (29) 。

二十二、 考慮由質量分別為 M 與 m 的分子與離子沿 x 軸均勻分布所組成的一維氣體系統。每個離子受到一個沿 x 軸的外力 $F = qE$ (q 與 E 為正值常數， q 為離子的電荷)，此外力並非很強，以致各離子的熱運動不受影響，但會在其作用下進行飄移運動，令 \bar{v} 代表離子的平均飄移速率。假設此系統的熱運動適用氣體動力論，離子的數目遠小於分子的數目，且每個離子在發生碰撞後的自由徑(即到下一次碰撞之前行進的距離)至少為 L 的機率為 $P(L) = e^{-L/\lambda}$ ，其中 λ 為平均自由徑；換言之，離子自由徑在 L 到 $L + dL$ 的機率等於 $P(L) - P(L + dL) = -dP$ 。假設 $M \gg m$ ，且離子發生的碰撞都為完全非彈性碰撞，以致碰撞後飄移速率變為零，則比值 \bar{v}/E (稱為遷移率)為 (30) 。

計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

一、行星逆行

為簡化計算，假設地球與水星繞行太陽的軌道皆為圓軌道，且在同一個平面上。若水星的軌道半徑與地球的軌道半徑比值為 α_0 ，且 $t = 0$ 時，太陽、水星與地球三個球體的中心連成一條直線，見右圖上的實心黑球，且定義此時地球指向太陽的方向為 x 軸正向，如圖 17 所示。若地球繞太陽的角頻率為 ω ，定義水星相對於地球的位置向量與 x 軸正向的夾角為 $\phi(t)$ ，

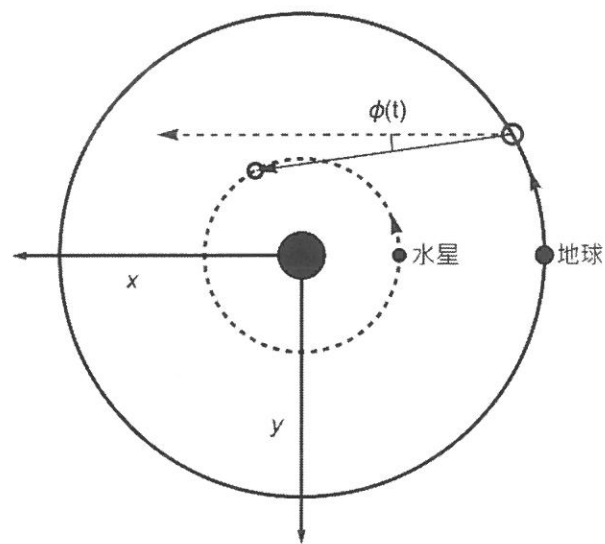


圖 17

(a) 求 $\tan \phi(t)$ （以 α_0 , ω 及 t 的函數表示之）

在 $\phi(t)$ 隨時間 t 遞減的這段期間內，這就是所謂的水星逆行。

(b) 已知 $\alpha_0 \approx 0.39$ 。若零時刻附近，水星在 $[-t_0, t_0]$ 這段時間內會呈現逆行，求 t_0 。

二、如圖 18 所示，一密度為 ρ ($\rho < 1$)、半徑為 R 之均勻小球浮在水面上達靜態平衡之通過球心的橫剖面。設鉛直方向為 z 軸，水的表面張力為 γ ，已知 O 點為球心， C 與 C' 點為球面與水接觸面邊緣與橫剖面相交的二點，且水面在這一點之切線與水平 (x 軸) 之夾角為 θ ，則

(a) 小球的淨重(即真實重量扣除浮力)為何？

(b) 接上題，設球面與水接觸面與邊緣 CC' 間之小球部分(稱為球冠)的體積為 v ，已知

$$v = \frac{2\pi R^3}{3}(1 - \cos \phi) - \frac{\pi R^3}{3} \sin^2 \phi \cos \phi$$

且 $\phi = \theta = \pi/3$ ，試問小球陷入水中的深度 h 與 R 之比，即 $\frac{h}{R} = ?$

(以 ρ 、 γ 以及重力加速度 g 表示之)。

(c) 接上題，已知水面變形之曲面在橫剖面中的曲線 Γ 可以方程式描述：

$$z(x) = -L_c \tan \theta e^{-(x-x_c)/L_c}$$

其中 x_c 、 z_c 為 C 點的 x 與 z 的座標， L_c 為毛細作用有效長度。今有兩一樣的小球浮在水面上，假設兩小球所造成之水面變形沿鉛直方向的位移為各小球所造成之變形沿鉛直方向的位移和，且忽略角度 ϕ 與 θ 的改變，則當球心相距 L 時，試估算兩球之間沿連心方向(即水平方向)的作用力。

(以 R 、 γ 、 θ 、 ϕ 、 L_c 與 x_c 表示以及 \pm 表示斥力或吸引力)。

提示：可考慮與小球淨重有關的位能改變。

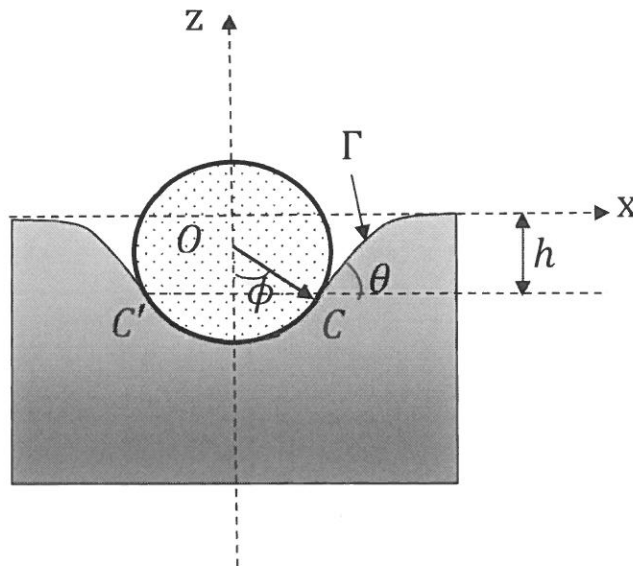


圖 18