

班級：      座號：      姓名：

一、填充題(答案要化到最簡。每題 4 分)

1. 有理化分母： $\frac{1}{\sqrt[3]{4+3\sqrt[3]{2}+1}}$ \_\_\_\_\_。

2.  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ 、 $\angle CAB = 50^\circ$ ，若  $P$  在線段  $\overline{AB}$  上、且  $\angle APC = 105^\circ$ ，試

求  $\frac{\overline{AP}}{\overline{BC}}$  之值\_\_\_\_\_。

3. 有兩組變數  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ 、 $Y: y_1, y_2, \dots, y_n$ ，已知  $X$  的標準差為 2， $Y$  的標準差

為 1，且  $X$  與  $Y$  的相關係數為 0。若變數  $A = X + Y$ 、 $B = X - Y$ ，則  $A$  與  $B$  的

相關係數之值為何？\_\_\_\_\_。

4. 已知  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ ， $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，且  $B = (I - A)^{-1}(I + A)$ ，求矩陣

$(I + B)^{-1} =$ \_\_\_\_\_。

5. 是 3 的倍數而且含有數字 6 的四位數有\_\_\_\_\_個。

6. 若  $x, y, z$  都是實數，則  $3^{4x^2+4y} + 3^{4y^2+2z} + 3^{z^2+8x}$  的最小值為\_\_\_\_\_。

7. 有 7 個不同顏色的球，每顆球上有一個數字，分別為 2, 2, 2, 3, 3, 5, 7，今從這 7

個球中任意取出至少兩球，並計算每種取法中被取出球的數字的乘積，試求所

有相異乘積值的總和\_\_\_\_\_。

8. 在座標平面上，從點  $A(0,0)$  走捷徑到點  $B(9,8)$ ，每步走一單位長，共轉 4 次

彎的機率為\_\_\_\_\_。

9. 空間中，點  $O(0,0,0)$ 、 $A(3,1,-2)$ 、 $B(-1,1,4)$ 、 $C(2,3,1)$ ，若

$\overline{OP} = x\overline{OA} + y\overline{OB} + z\overline{OC}$ 、且  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 3 \leq x + y + z \leq 6$ ，試求所有點  $P$  所

成圖形的區域體積\_\_\_\_\_。

10. 已知  $\angle AOB = 30^\circ$ ，若  $E$  為  $\angle AOB$  內部一點，其中  $\angle OAE = \angle OBE = 90^\circ$ 、

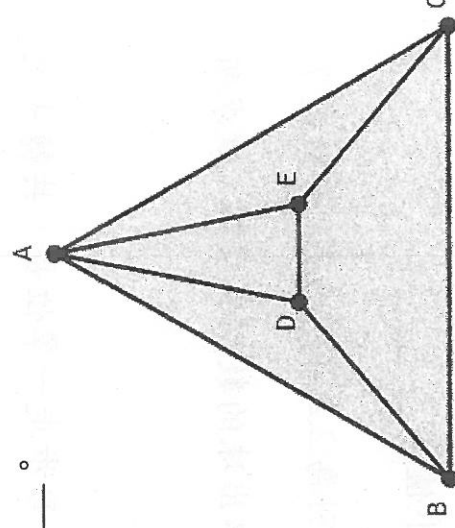
$\overline{AE} = a, \overline{BE} = b, \overline{OE} = \alpha \overline{OA} + \beta \overline{OB}$ ，試求  $\alpha, \beta$  (以  $a, b$  表示) \_\_\_\_\_。

11. 空間中一四面體  $ABCD$ ，已知  $\overline{AD} = \overline{BC} = 6$ ， $\overline{AB} = \overline{CD} = 8$ ， $\overline{AC} = 10$ ， $\overline{DH}$  垂直

直平面  $ABC$  於  $H$  點， $M$  為  $\overline{BC}$  中點，且  $A, M, H$  三點共線，求  $\overline{DH}$  \_\_\_\_\_。

12. 如圖(圖形不代表實際大小)，正三角形  $ABC$  中， $\overline{AD} = \overline{AE} = 2\sqrt{7}$ 、 $\overline{DE} = 2$ 、

$\overline{DB} = \overline{EC} = 4$ ，則正三角形  $ABC$  的邊長為 \_\_\_\_\_。



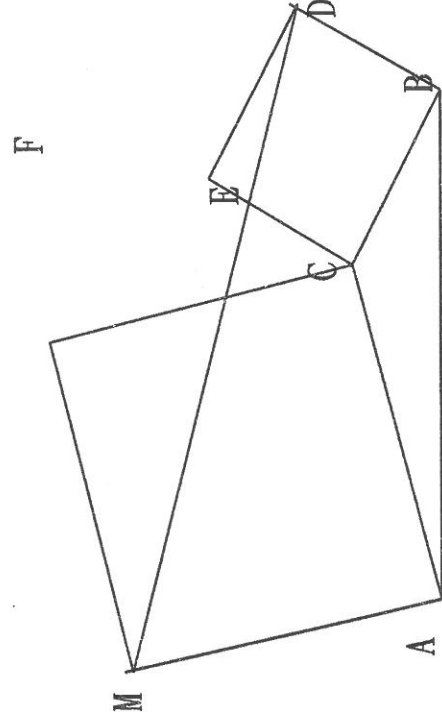
13 若函數  $f: R^+ \rightarrow R$ ，滿足

$$f\left(1 - \frac{1}{1+t}\right) + f\left(\frac{1+t}{t}\right) \log(1+t) = f\left(\frac{1+t}{t}\right) \log(t) + 2020, \text{ 則 } f(1000) = \text{_____}。$$

二、計算證明題：(每題 8 分，要有計算過程)

1. 在銳角 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC} > \overline{BC}$ ，點  $D$  在邊 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AD} = \overline{BC}$ ，若 $\angle BDC = 30^\circ$ ，求 $\angle A = ?$  度
2. 設 $a + b + c + d + e = 8$ ， $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$ ，求  $e$  之最大值與最小值。
3. 空間中  $n$  個平面至多將空間分成  $a_n$  個區域，求  $a_n = ?$  ( $n \geq 2$ )
4.  $A, B$  是直線  $L$  上兩相異定點， $C$  是其中一半平面內任意點， $BCED$ ， $AMFC$  是正方形，如圖。

求證： $\overline{MD}$  中點是定點。



5. (Ramsey 定理) 設空間中六個相異點中任意四點不共面，若將其中任意兩點間的連線塗成紅色或藍色線段，則必存在一個三邊顏色相同的三角形。試證之。
6. 由數位  $1, 2, 3$  組成  $n$  位數 ( $n \geq 3$ )，要求  $n$  位數中數字  $1, 2, 3$  中每一個至少出現一次，求這種  $n$  位數的個數。