

班級：      座號：      姓名：

※計算證明題：(請於答案卷上寫上題號再作答，不必按照順序)(除第一、二、六、十、十一題為8分外，其餘每題10分)

一、(1) 證明： $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  為無理數。(2分)

(2) 證明： $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$  為無理數。(3分)

(3) 證明： $\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$  為無理數。(3分)

二、設  $\frac{x-4y+2z}{x} = \frac{2x+7y-4z}{y} = \frac{3x+9y-5z}{z}$ ， $x$ 、 $y$ 、 $z$  為實數，試求此方程組的解。

三、設  $a$  是不等於1的實數，證明： $y = \frac{x-1}{ax-1}$  的圖形關於直線  $y=x$  對稱。

四、求  $\sum_{k=1}^n k^2 c_k^n = ?$ ， $n \geq 2$  (其中  $c_k^n$  為組合數，又答案請用  $n$  表示。)

五、已知二元多項式  $f(x, y)$ ，滿足下列條件

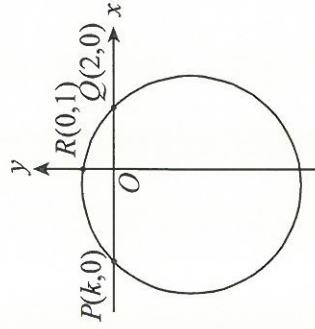
(i) 對任意實數  $x$ ， $f(x, 0) = 1$ ;

(ii) 對任意實數  $x, y, z$ ， $f(f(x, y); z) = f(z; xy) + z$ ;

試問  $f(2020; 2) = ?$

六、如下圖，圓  $C$  通過不同的三點  $P(k, 0)$ ， $Q(2, 0)$ ， $R(0, 1)$ ，已知圓  $C$  在點  $P$  的切線斜率為1，試求  $k$  的值及

圓心。



七、設  $L_1: \frac{x}{a} = \frac{y-2}{b} = \frac{z-2}{c}$ ， $L_2: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ ， $L_3: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{2}$ ， $L_1$  與  $L_2$ 、 $L_3$  分別相交於  $A$ 、

$B$  二點，

(1) 求  $a:b:c$ 。(2)  $A$ 、 $B$  之坐標。

八、費氏數列 $\langle F_n \rangle$ 定義如下：

$$\begin{array}{c} \text{O} \\ || \\ \text{H}^{\text{O}} \\ | \\ \text{H} \end{array}$$

115

$$E_n^{\text{c}} = E_{n-1}^{\text{c}} + E_{n-2}^{\text{c}} \wedge 2$$

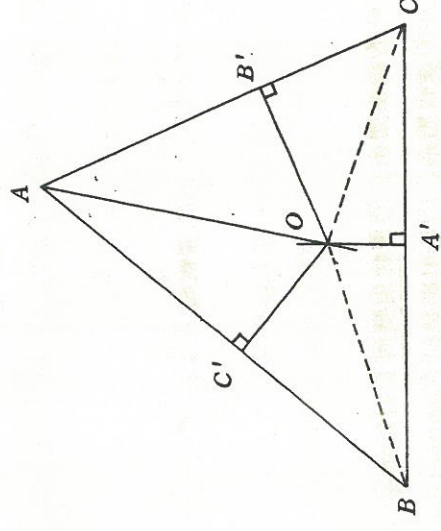
求證：費氏數列的公式解： $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$ ， $n$  為自然數或 0。

九、在右圖中， $\triangle ABC$  是任意三角形，設  $\angle BAC$  的平分線與線段  $BC$  的中垂線相交於  $O$  點。令  $A'$ 、 $B'$ 、 $C'$  分別表示由  $O$  點至線段  $BC$ 、線段  $CA$  與線段  $AB$  的垂直線的垂足，其中  $A'$  自然是線段  $BC$  的中點。

因為  $O$  點在線段  $BC$  的中垂線上，所以線段  $OB = 線段 OC$ 。另一方面，因為  $O$  點在  $\angle BAC$  的平分線上，而線段  $OB'$ 、線段  $OC'$  分別與  $\angle BAC$  的兩邊垂直於  $B'$ 、 $C'$ ，故  $\triangle AOB' \cong \triangle AOC'$ 。於是線段  $OB' = 線段 OC'$ ，線段  $AB' = 線段 AC'$ 。

其次，在 $\triangle BOC'$ 與 $\angle COB'$ 中，因為線段  $OB=$ 線段  $OC$ ，線段  $OC'=$ 線段  $OB'$ ，而且  $\angle BC'O=\angle CB'O=90^\circ$ ，故 $\triangle BOC' \cong \angle COB'$ 。於是，線段  $BC'=$ 線段  $B'C$ 。

由於線段  $AB' = \text{線段 } AC'$ ，線段  $BC' = \text{線段 } B'C$ ，故得線段  $AB = \text{線段 } AC' + \text{線段 } C'B = \text{線段 } B'C + \text{線段 } B'C = \text{線段 } AC$ ，所以  $\triangle ABC$  是等腰三角形。



試指出上述推論的錯誤地方。

十、證明：在任意五個整數中，必有三個數，他們的和能被3整除。

十一、整數  $a, b$  的最大公因數記為  $(a, b)$ 。試求整數  $x, y$  使  $327x + 180y = (327, 180)$ 。