

國立彰化高級中學 111 學年度科學班甄選【數學科實驗實作】試題

注意事項：

1. 本試卷共有兩頁，請將答案寫在答案卷上，並將試題卷、答案卷、計算紙交回。
2. 第一部份是填充題，1~10 題、每格 6 分。答案需全對才給分。
3. 第二部份是計算證明論述題，第 11~12 每題 8 分、13~14 題，每題 9 分，需寫計算過程才給分。
4. 答案需化至最簡型式，不得以 n^m 、 $n!$ 、 P_m^n 、 C_m^n 呈現。
5. 所有圖形僅作參考，不代表實際大小。
6. 書寫過程，如果數學表達優秀者，酌以加 1~2 分。

【題目開始】

壹、填充題：

1. 電磁現象是一種物理現象，專指電流通過電路時，在其周圍產生磁場的現象，90%的電磁現象都是電磁力的關係。電磁力是宇宙四大基本力之一，其發現也被稱為迄今為止，人類探索自然最偉大的成就。所有電磁現象的原理可由麥克斯韋方程組（Maxwell's equations）解釋，麥克斯韋方程組由四個方程式—高斯定律、高斯磁定律、法拉第定律、麥克斯韋—安培定律組成。在由英國科學期刊「物理世界」舉行的讀者票選最偉大公式活動中，麥克斯韋方程組更是拿下十大最偉大公式的排名第一。而促成這些偉大發現絕非一朝一夕，其中關鍵影響力是由法國科學家查爾斯·庫倫在 1785 年透過扭秤實驗得出的庫倫定律，庫倫定律是電學發展史上的第一個定量規律，也是電學史上的一重要里程碑。庫倫定律說明：「在真空中，兩個靜止的點電荷之間的作用力（庫倫力）大小與這兩個電荷所帶電量大小（ q_1, q_2 ）的乘積成正比，而與他們的距離（ r ）的平方成反比，其間的比例值稱為庫倫係數；作用力的方向沿著這兩個電荷的連線，並依循同名電荷相斥、異名電荷相吸原則。」請回答以下問題：

今有三電荷，其電荷電量大小由左至右分別為正電荷 Q 、負電荷 $2Q$ 、正電荷 $3Q$ 。若將負電荷 $2Q$ ，置於正電荷 Q 與 $3Q$ 之線段中，且與 Q 的距離為與 $3Q$ 的距離的 2 倍，若每一個電荷所受的庫倫力大小（不管方向）分別為 F_q 、 F_{2q} 、 F_{3q} ，請選出所有正確的選項？

(1) $F_{3q} > F_{2q} > F_q$ (2) $F_{3q} < F_{2q} < F_q$ (3) $F_{3q} = F_q > F_{2q}$ (4) $F_{3q} > F_q > F_{2q}$ (5) $F_{3q} = F_q + F_{2q}$ 。（多重選擇題）

2. 解方程式 $\sqrt{x} + \sqrt{2x+5} + 2\sqrt{2x^2+5x} = 25 - 3x$ _____。

3. 試求 $\sqrt{111111111 \times 1000000005 + 1}$ 之值？_____。

4. 若 x, a, b, c, d 皆為實數，求當 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 為完全立方數時，數對 $(b^3, c^3) = ?$ （以 a, d 表示）_____。

5. 求方程式 $x^2y - 2xy + y + x^2 - 2x = 1983$ 的所有整數解 (x, y) 的 x 值之總和？_____。

6. 有一四面體 ABCD，已知 $\overline{AB} = \overline{CD} = 5$ 、 $\overline{AC} = \overline{BD} = 6$ 、 $\overline{AD} = \overline{BC} = 7$ ，求此四面體體積？_____。

7. 一等差數列 $\{a_n\}$ ，前 n 項和為 S_n ，若 $S_{111} = 3102$ 、 $S_{2022} = 1877$ ，求 $S_{2133} = ?$ _____。

8. 在平面上，若半徑為 2、3、10 的圓兩兩外切，試求與此三圓皆外切的圓半徑？_____。

9. 觀察一數列 $\langle a_n \rangle$ ，其首項 $a_1 = 2$ ，且 $a_{n+1} = 3a_n + 4$ ，試求一般項 $a_n = ?$ （以 n 表示、 n 為自然數）_____。

10. 設 G 為 $\triangle ABC$ 的重心，且 $\overline{AG} = 5$ 、 $\overline{BG} = 12$ 、 $\overline{CG} = 13$ ，試求

(1) $\triangle ABC$ 的面積？_____。

(2) $\triangle ABC$ 為何種三角形（銳角、直角、鈍角）？_____。

貳、證明論述題：

11. 【證明題】：若實數 x, y, z 滿足 $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$ ，求證： $(x + y + z)^3 = 27xyz$ 。

12. 【證明題】：假設 \overline{AB} 為圓的直徑、 O 為圓心、 E 在此圓上，直線 L 是圓在 B 點的切線、直線 M 是圓在 E 點的切線，

$B \neq E$ 、而且 L 與 M 交於 C 點，若直線 \overline{AE} 與直線 L 交於 D 點，試證： $\overline{BC} = \overline{CD}$ 。

13. 【證明題】：已知 a, b, c, d 為實數，且 $a + b = c + d$ 、 $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$ ，求證： $a^{111} + b^{111} = c^{111} + d^{111}$ 。

14. 【論述題】：一個非常熟悉的遊戲：有 n 顆球，甲乙兩人依序取球、甲先拿、每人每次可隨意取1或2顆球、但不可不拿，規定取得最後一顆球者為敗。試問：在甲乙雙方都是此遊戲高手的前提下， n 為何值時甲必勝、又 n 為何值時乙必勝？需說明理由。

【試題結束】