

國立彰化高級中學 112 學年度科學班甄選 【數學科實作】試題

注意事項：

1. 本試題有第一部分：10 題填充題，每題 6 分。第二部分：5 題計算證明題，每題 8 分。

圖形僅作為參考，不代表實際大小。

2. 答案請化簡、依序填入答案欄內，並交回答案卷。若為分數，以最簡假分數呈現。

3. 若答案超過 1 個，需全對才給分。計算題只有答案，沒有計算過程不予給分。

試題開始

第一部分：填充題

1. 團團與圓圓一起練習求解一道多項式的問題：

「若 $f(x)$ 為二次多項式，滿足 $f(-1) = -5$ 、 $f(1) = m$ 、 $f(2) = n$ ，試求 $f(4)$ 的值。」

在計算的過程中，團團誤將 m 的值看成 -7 ，求得 $f(4) = -10$ ；而圓圓將求 $f(4)$ 看成 $f(-2)$ ，並求得其值為

$f(-2) = -48$ 。若其餘過程皆無錯誤，試求正確的 $m - n + f(4)$ 之值_____。

2. 試求 $(x^{512} + x^{256} + 1) \div (x^2 + x + 1)$ 的商數中，係數不為 0 的項數有幾項？_____。

3. 若關於 x 的二次方程式： $7x^2 - (p+13)x + p^2 - p - 2 = 0$ ，其兩根為 α, β ，且 $0 < \alpha < 1 < \beta < 2$ ，試求實數 p 的範圍_____。

4. 設 $\sqrt{2023}$ 的小數部份為 a ，若正整數 n 滿足 $\frac{n}{88} < a < \frac{n+1}{88}$ ，求 $n =$ _____。

5. 在座標平面上，有一等腰梯形依順時針方向依序為 A, B, C, D ，其上底與下底平行 x 軸，兩對角線 \overline{AC} 、 \overline{BD} 相交於原點 O ，若 $\overline{AD} = 6$ 、 $\overline{BC} = 8$ ，而腰長 $\overline{AB} = \sqrt{37}$ ，求直線 AC 的斜率_____。

6. 若 a 為任意非負實數，試求出滿足 $a \geq 14\sqrt{a} - x$ 的最小 x 值_____。

7. 農夫有一塊正方形的田地，已知該田地的四個邊界剛好各有一口水井，而且都不是在正方形的頂點上，若將該田地座

標化且選取一定點為原點後，則四口水井的座標依順時針方向分別為 $(0, 8)$ 、 $(9, 2)$ 、 $(6, 0)$ 、 $(-5, 4)$ ，試問滿足該四口水

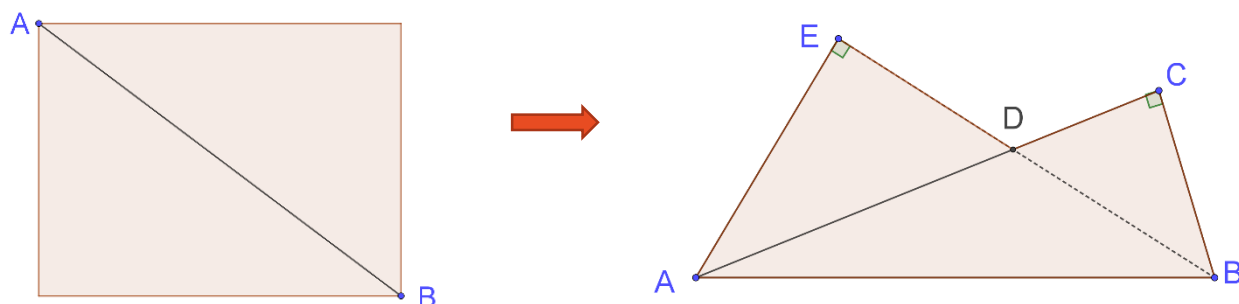
井位置的最大田地面積為_____平方單位。

背面尚有試題

8. 試求有多少個不同的直角三角形，符合「直角三角形之一股長為 45，而且三邊長皆為自然數」？_____。

(三邊長皆相等的三角形視為相同的三角形)

9. 如下圖所示，將一長方形沿著對角線 \overline{AB} 將左下角折起，形成一非凸五邊形 $ABCDE$ ，若五邊形 $ABCDE$ 面積為原來長方形面積的 $\frac{7}{10}$ ，試求出原來長方形的長邊長為短邊長的_____倍。



10. 有七個球隊進行足球錦標賽，每一個球隊與其他各球隊都恰比賽一場。每場球賽都分出勝負，每個球隊所參賽的每一場輸贏的機率都是 50%，且各場球賽的結果都是互相獨立的。若每場球賽贏者得 1 分，輸者得 0 分；以各隊得分的總和排定各隊的名次。今已知此錦標賽第一場的比赛結果是 A 隊贏了 B 隊，而在錦標賽結束時， A 隊總得分多於 B 隊總得分的機率為 $\frac{n}{m}$ ，其中 n, m 為互質的正整數，試求 $n+m$ 之值_____。

第二部分：計算證明題（每題 8 分）（只有答案沒有計算過程不予計分）

1. 已知 P 為 $\triangle ABC$ 內部一點，延長 \overline{AP} 、 \overline{BP} 、 \overline{CP} 分別與對邊交於 D 、 E 、 F 三點。設 $\overline{AP} = \alpha$ 、 $\overline{BP} = \beta$ 、 $\overline{CP} = \gamma$ ，滿足 $\alpha + \beta + \gamma = 43$ ，且 $\overline{PD} = \overline{PE} = \overline{PF} = 5$ 時，試求 $\alpha\beta\gamma$ 乘積之值。

2. 試求出聯立方程組：
$$\begin{cases} xy + x + y = -5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$$
 之 (x, y) 解。

3. 一個四位數除以 19 所得的餘數，等於它的四個數字的立方和，求滿足這樣條件的所有四位數。

4. 【同初試第 16 題】

已知 $y = f(x) = x^2 + bx + c$ 為正整數係數的二次函數，圓圓想找出函數 $y = f(x)$ ，就從位於第一象限的圖形上找 8 個格子點（座標 x, y 都是整數），使得這 8 個點的 x 坐標以相等的正整數值增加，且其函數值分別為 20、56、110、182、274、380、506、650，但其中有一個函數值不正確，試求此二次函數的係數 $b+c$ 之值（不只一組解）。

5. 試證明：在平面上，對於任意 $\triangle ABC$ ，其外心（ O ）、垂心（ H ）、重心（ G ）共線（尤拉線），而且 $\overline{OH} = 3 \overline{OG}$ 。

說明：1. 外心 O ： $\triangle ABC$ 外接圓圓心。垂心 H ： $\triangle ABC$ 三邊之高的交點。重心 G ： $\triangle ABC$ 三中線交點。

2. 此題在證明完全正確的條件下，如果能用不一樣的方法再證明正確，則可再得 8 分。

國立彰化高級中學 112 學年度科學班甄選

【數學科實作】答案卷

- 注意事項：
1. 本試題有第一部分：10 題填充題，每題 6 分。第二部分：5 題計算證明題，每題 8 分。

圖形僅作為參考不代表實際大小。

2. 答案請化簡、依序填入答案欄內，並交回答案卷。若為分數，以最簡假分數呈現。

3. 若答案超過 1 個，需全對才給分。計算題只有答案，沒有計算過程不予給分。

第一部分：填充題

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10		

第二部分：計算證明題（每題 8 分，只有答案沒有計算過程不予計分）

1.

2.

3.

4.

5.