

# 國立彰化高級中學 109 學年度科學班甄選【數學科實驗實作】試題

注意事項：

1. 可能會用到的公式

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)。$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2。$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)^3 - 3xy(x+y)。$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3。$$

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}。 \quad 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}。 \quad 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2。$$

一等差數列  $\langle a_n \rangle$ ，首項  $a_1$ 、公差為  $d$ ，則第  $n$  項  $a_n = a_1 + (n-1)d$ ；前  $n$  項和為  $\frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$ 。

根的性質：若  $f(a) = 0$ ，則稱  $a$  為  $f(x) = 0$  的根。

$$\triangle ABC \text{ 中，三邊長 } \overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \text{ 則面積為 } \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}ab \sin C = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, s = \frac{a+b+c}{2}, \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}。$$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta。 \quad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta。 \quad \tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta。$$

$$\text{平行四邊形 } ABCD \text{ 中， } \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2)。$$

2. 本試卷有 16 題計算證明題，第 1~13 題，每題 6 分，第 14~15 題，每題 7 分，第 16 題 8 分。請將答案寫在答案卷上（答案卷有 5 頁），並將試題卷、答案卷、計算紙交回。

3. 「計算題」需將答案寫在指定答案空格內，並需在計算欄內寫上計算過程（勿寫錯格），只有答案沒有計算過程不予計分。

4. 「證明題」過程寫在計算欄內。

5. 所有圖形僅作參考，不代表實際大小。

6. 答案需化至最簡型式，不得以  $n^m$ 、 $n!$ 、 $P_m^n$ 、 $C_m^n$  呈現。

7. 書寫過程，如果數學表達優秀者，酌以加 1~2 分。

## 【題目開始】

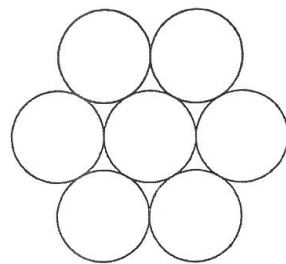
1. 2019—2020 年新型冠狀病毒(COVID-19)爆發後，疫苗一詞又在熱搜排行榜上高居不下。根據時報出版的「台灣數據百閱」一書，資料來源為「106 年永續發展指標系統評量結果報告—現行兒童疫苗接種率」（行政院國家永續發展委員會提供），所記載：「近十年來，台灣的兒童疫苗接種率從 89% 提升至 93.86%，讓兒童傳染病流行狀況控制得宜。與 OECD 組織國家相比，台灣的麻疹疫苗接種率 98.6% 為第三名、DPT 疫苗接種率 98% 為第四名。然而隨著長者、慢性病患者等傳染病高風險族群人口增加，成人疫苗接種將是接下來不可忽視的挑戰。106 年 65 歲以上長者的流感疫苗接種率為 48.8%，仍和 WHO 建議的 75% 接種率有段距離。」若根據歷年資料調查、電腦判讀分析，台灣 65 歲以上長者的流感疫苗接種率數學模型為  $f(x) = \frac{(x-95)^2 + 35(x-95) + 31}{x-95} \%$  ( $96 \leq x \leq 107$ ， $x$  表年份，以民國年份計算)，請回答以下問題：

(1) 民國 97 年，65 歲以上長者的流感疫苗接種率為 \_\_\_\_\_ %。(2 分)

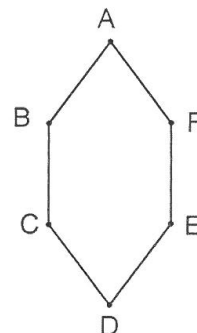
(2) 承(1) 民國 \_\_\_\_\_ 年 65 歲以上長者的流感疫苗有最低接種率，

又此最低接種率為 \_\_\_\_\_ %。(四捨五入至小數點以下第二位)(2+2 分)

2. 如右圖為 7 個半徑皆為 2 的圓，而且相鄰的圓都互相外切，若現在要用一條線子將所有外圍的 6 個圓圈起來，那麼所需要的線最短的長度為 \_\_\_\_\_，此時繩子圍出來的面積為 \_\_\_\_\_。（註明：圓周率以  $\pi$  表示，每個空格各 3 分）



3. 今有四個相同的均勻骰子，其 6 個面的數字分別為 1,1,2,3,5,8。試求點數和為 11 的機率\_\_\_\_\_。
4. 試求出  $x^3 + 3x - 2 = 0$  在 0 與 1 之間的實根\_\_\_\_\_。（提示：利用  $x = a + b$  與  $a^3 + b^3$  公式。）
5. 有一三角形，其三個邊長都是正整數，而且最大公因數是 1。如果此三角形的內切圓剛好將某一條中線分成 1:2:1 的比例，試求此三角形的周長\_\_\_\_\_。
6. 若實數  $x, y$  滿足  $\frac{x}{2^{10}-5^3} - \frac{y}{2^{10}+6^3} = 1$ 、 $\frac{x}{3^8-5^3} - \frac{y}{3^8+6^3} = 1$ ，求  $x - y =$ \_\_\_\_\_。
7. 在一四邊形  $ABCD$  中， $\overline{AB} = 5$ 、 $\overline{BC} = 6$ 、 $\overline{CD} = 5$ 、 $\overline{AD} = 4$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ 。若  $\overline{AC}$  與  $\overline{BD}$  交於點  $E$ ，求  $\frac{\overline{BE}}{\overline{ED}} =$ \_\_\_\_\_。
8. 如圖， $ABCDEF$  是一各邊長都相等的凸六邊形，而且  $\overline{BC}, \overline{AD}, \overline{EF}$  都互相平行。  
若  $H$  為  $\triangle ADF$  的垂心、六邊形  $ABCDEF$  的最小內角是  $8^\circ$ ，求  $\triangle AHD$  的最小內角度數\_\_\_\_\_。
9. 試求  $\sqrt{2019^2 + 2019^2 \cdot 2020^2 + 2020^2} =$ \_\_\_\_\_。
10. 若  $x, y$  都是實數，且當  $x = a, y = b$  時，函數  $f(x, y) = 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 14y + 18$  有最小值  $m$ ，求  $(a, b, m) =$ \_\_\_\_\_。
11. 設函數  $f\left(\frac{4-3x}{2x+1}\right) = \frac{3x-4}{x+2}$ ，試求  $f(x) =$ \_\_\_\_\_。
12. 若  $[x]$  表小於等於  $x$  的最大整數，如  $[3] = 3$ 、 $[-1.6] = -2$ ，試求  $\left\lceil \frac{10^{2019}}{10^{673} - 2020} \right\rceil$  的末五位整數\_\_\_\_\_。
13. 1919 速乘法是印度人發明的。這個方法適用於十幾乘以十幾，舉例  $13 \times 16$ ，先把  $(13+6) \times 10 = 190$ ，再加上  $3 \times 6 = 18$ ，即  $13 \times 16 = 190 + 18 = 208$ 。在我們驚嘆如此迅速之時，其實這個速算法來自乘法公式。請回答以下問題：  
(1)  $(a+b) \times (c+d) =$ \_\_\_\_\_。(1 分)  
(2) 如果以符號表示，1919 速乘法可把 10 幾寫成  $1a$ ，請說明  $1a \times 1c = 10(1a+c) + ac$  的理由\_\_\_\_\_。(3 分)  
(3) 事實上，上式可適用於十位數一樣數字的乘法，如  $43 \times 47$ 。請以  $43 \times 47$  為例，說明你從上式推論後計算的步驟\_\_\_\_\_ (2 分) (註明：不可直接相乘)
14. 一正整數  $N$  是否為 11 的倍數的判斷方法是：將奇數位數字和與偶數位數字和相減，如果相減後的數是 0 或 11 的倍數，則此數  $N$  就是 11 的倍數；如果不是 0 也不是 11 的倍數，則此數  $N$  就不是 11 的倍數。請證明：  
試以  $N = abcdefgh$ ，其中  $a, b, c, d, e, f, g, h$  是 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 其中之一的整數， $a \neq 0$  證明。  
(註明：不可用具體數字證明)
15. 請證明： $2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots \times 2020 - 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times 2019$  可被 2021 整除。
16. 作圖題：請以直尺、圓規作圖。需以文字說明作圖過程並證明。 (1) 作圖正六邊形。(4 分) (2) 作圖正五邊形。(4 分)



【試題結束】