

國立彰化高級中學 108 學年度科學班甄選【數學科】試題

填充題【1~12題，每題7分。答案請化簡，並依序填入答案欄內】

1. 直角三角形 ABC 中，已知 $\angle C = 90^\circ$ 、 $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle A$ 的內角平分線 \overline{AD} 交 \overline{BC} 於 D 點，則

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

2. 座標平面上一拋物線： $y = 2x^2 + 5x + c$ ，其與 x 軸交於 A 、 B 兩點，若 A 、 B 兩點在 y 軸的兩側，則實數 c 的範圍為_____。

3. 一正方形 $ABCD$ ，設其邊長為1，且 E 、 F 兩點分別為線段 \overline{AB} 、 \overline{AD} 上的動點，滿足 $\overline{AE} = \overline{AF}$ ；當 $\overline{AE} = \overline{AF} = k$ 時，四邊形 $CDFE$ 面積的最大值為 m ，則數對 $(k, m) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 若 n 是正整數，設 $n!$ 表示前 n 個正整數的連乘積，即 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ ，例如：

$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ ；則 $1! + 2! + 3! + \cdots + 16! + 17!$ 計算後，末尾有_____個連續的0。

5. 直角三角形 ABC 中，已知 $\angle C = 90^\circ$ ， D 、 E 兩點分別為線段 \overline{BC} 、 \overline{AC} 的中點，若 $\overline{AD} = 11$ 、 $\overline{BE} = 8$ ，則三角形 ABC 的外接圓面積=_____。

6. 設 x 、 y 為兩相異實數滿足： $x^2 + \sqrt{5}y = y^2 + \sqrt{5}x = 7$ ，則 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 設三角形 ABC 的三邊長皆為整數，若其三邊的高為6、10、 x ，其中 x 為正整數，則 x 的最大值為_____。

8. <哥德巴赫猜想>是說：任何大於7的偶數都可拆解成兩個相異質數之和。例如： $24 = 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13$ ，而其中拆解出來的各組質數中，以 $11 \times 13 = 143$ 是乘積最大值。試問：128拆解出來的各組質數中，乘積最大值為_____。

9. 座標平面上六直線： $y = x$ 、 $y = 2x$ 、 $y = 3x$ 、 $y = -x + 2$ 、 $y = -2x + 4$ 、 $y = -3x + 6$ ，此六直線在座標平面上，共可交出_____個相異的交點。

($y = x$ 、 $y = 2x$ 、 $y = 3x$ ，三直線兩兩都相交於 $(0, 0)$ ，算一個交點)。

10. 有一數列，首項為1，從第二項開始，該項的值是前一項的兩倍再加一，設第16項的值為 a ，則 a 除以17的餘數為_____。

11. 方程式 $(x + 1)(x + 3)(x + 4)(x + 6) = 720$ 的最小實根為_____。

12. 從1~17這17個正整數中選出相異4數，由小到大設為 a 、 b 、 c 、 d ，則滿足： $b - a \geq 7$ 、 $c - b \geq 5$ 、 $d - c \geq 2$ ，共有_____種選法。

計算證明題【1~2題，每題8分。只有答案，沒有過程不計分。】

1. (1) 試因式分解： $6x^2 - 65x + 171$ 。(3分)

(2). 設 x 是正整數滿足： $6x^2 - 65x + 171$ 可分解成連續兩個正整數的乘積。

已知 x 的最小值為3，則第二小的值為何？(5分)

2. 三角形 ABC 中，已知 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，設 E 為三角形 ABC 的外接圓劣弧 \widehat{AC} 上一點，連接 \overline{AE} 並延長交直線 \overline{BC} 於 D 點。試回答下列問題：

(1) 試證明： $\overline{AB}^2 = \overline{AE} \times \overline{AD}$ 。(5分)

(2) 若 $\overline{AC} = 8$ ，且 E 為 \overline{AD} 中點，則 $\overline{AD} = ?$ (3分)