

國立彰化高級中學 106 學年度科學班甄選【數學科實驗實作】試題

一、填充題【每題 6 分，共 84 分。答案請化簡，並依序填入答案欄內】

1. 一個三位正整數 abc 如果同時滿足 $a > b$ 且 $b < c$ ，則稱此數為凹數，例如：424，317，502 等。

則所有三位數中，是凹數且是奇數共有_____個。

2. 設拋物線 $y = ax^2 + bx + c$ 的頂點為 $(\frac{1}{4}, \frac{-9}{8})$ ，其中 $a > 0$ 且 $a + b + c$ 為一整數，則 a 的最小值為_____。

3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB} = 7$ 、 $\overline{BC} = 8$ 、 $\overline{AC} = 9$ 。若有一圓之圓心 O 在 \overline{BC} 上，且與 \overline{AB} 、 \overline{AC} 皆相切，則此圓半徑為_____。

4. 滿足方程式 $x^2 + xy - 5y = 0$ 的正整數解 $(x, y) =$ _____。

5. 設 P 為正 $\triangle ABC$ 外接圓上劣弧 \widehat{BC} 上的一點，滿足 $\overline{PB} = 4$ 且 $\overline{PC} = 6$ ，則 $\triangle ABP$ 面積： $\triangle ACP$ 面積 =_____。

6. 在一個數列中，第一項之後的每一項都是它前一項各位數字的平方和。

例如：第一項是 14，則第二項為 $1^2 + 4^2 = 17$ ，第三項為 $1^2 + 7^2 = 50$ ，依此類推。試求當第一項為 117 的數列，其第 2017 項為_____。

7. 試求 $\frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{(1 + \frac{1}{2}) \times (1 + \frac{1}{3})} + \frac{\frac{1}{4}}{(1 + \frac{1}{2}) \times (1 + \frac{1}{3}) \times (1 + \frac{1}{4})} + \dots + \frac{\frac{1}{117}}{(1 + \frac{1}{2}) \times (1 + \frac{1}{3}) \times \dots \times (1 + \frac{1}{117})} =$ _____。

8. 已知二次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(-3) = f(2) = 0$ 且 $5 < f(1) < 7$ ，若 $f(x)$ 除以 $3x + 8$ 的餘式為整數，則此餘式必為_____。

【背面尚有試題】

9. 2^6 可寫成數個 2 的非負整數次方之和，例如： $2^6 = 2^1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2^0 + 2^0 + \dots + 2^0$
(64 個 2^0)，試將 3^{106} 寫成 213 個 3 的非負整數次方之和(寫出一種表示方式即可)。 $\underline{\hspace{2cm}}$

10. 試利用公式 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ ，計算 $2 \times 3 \times 4 + 5 \times 6 \times 7 + 8 \times 9 \times 10 + \dots + 104 \times 105 \times 106$
 $= \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 等差數列 a, b, c, d 滿足 $\begin{cases} a+b+c+d=50 \\ ax+by+cz+dw=100 \\ aw+bz+cy+dx=150 \end{cases}$ ，其中 x, y, z, w 皆為實數，則
 $x+y+z+w = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

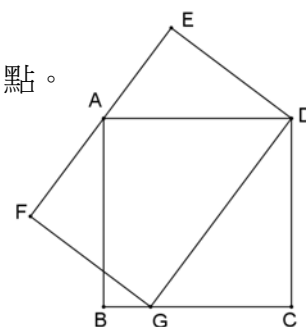
12. 利用 110 根火柴棒來排一個三邊皆不相等的三角形，且規定最大邊的邊長為最小邊的邊長的 4 倍，在不裁切的情況下，則最小邊需要用掉 $\underline{\hspace{2cm}}$ 根火柴棒。

13. 若 x, y 為正實數，且 $x+y=4$ ，則 $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{y^2+1}$ 有最小值為 m 時，此時的 $x=a$ ，試求數對 $(a, m) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 已知 x 為實數，若 $f(x) = |x-1| + |2x-1| + |3x-1| + \dots + |9x-1| + |10x-1|$ ，當 $x=a$ 時， $f(x)$ 有最小值為 m ，試求序對 $(a, m) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、計算題【16 分，各 8 分】請寫出計算過程，否則不予計分！

1. 如圖， G 為邊長為 8 的正方形 $ABCD$ 邊上一點，矩形 $DEFG$ 的 EF 邊經過 A 點。
已知 $\overline{GD} = 10$ ，試求 \overline{FG} 長度？



2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 40^\circ$ ， $\angle C = 80^\circ$ ，且 $\angle B$ 的內角平分線 \overline{BD} 交 \overline{AC} 於 D 點， $\angle C$ 的內角平分線 \overline{CE} 交 \overline{AB} 於 E 點，設 \overline{BD} 交 \overline{CE} 於 I 點，試證明： $\overline{BI} + \overline{IE} = \overline{BC}$ 。

【試題至此結束】