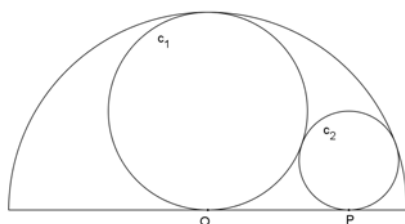


# 國立彰化高級中學 106 學年度科學班甄選【數學科】試題

一、填充題【每題 6 分，共 84 分。答案請化簡，並依序填入答案欄內】

1. 正整數  $N$  經過開根號之後再四捨五入到整數位，所得的值為 106，這樣的  $N$  有\_\_\_\_\_個。
2. 方程式  $x^2 - kx + 748 = 0$  有二個整數根，則  $k$  的可能值共有\_\_\_\_\_個。
3. 設函數  $f(x)$  滿足  $f(x) + f(x-1) = 3x + 117$ ，試求  $f(2017) - f(1) =$ \_\_\_\_\_。
4. 試求  $322^{105} \times 323^{106} \times 327^{107}$  的個位數數字為\_\_\_\_\_。
5. 如下圖，圓  $C_1$  內切於  $O$  為圓心的半圓  $O$ ，圓  $C_2$  內切於半圓  $O$  且與圓  $C_1$  相切，其中點  $O$  及點  $P$  均為切點。已知圓  $O$  的半徑為 10，則圓  $C_2$  的半徑為\_\_\_\_\_。



6. 若  $x, y$  為實數，且滿足  $x^2 + 2y^2 = 1$ ，試求  $8x + 2y^2$  的最大值為\_\_\_\_\_。
7. 定義：正整數  $N$  的真因數是指除了  $N$  本身以外的所有正因數。例如：6 的真因數有 1, 2, 3，共三個。試問：32016 的所有真因數總和為\_\_\_\_\_。
8. 已知  $107 \times \sqrt{106 \times \sqrt{105 \times 103 + 1} + 1} = 97 \times 95 + A$ ，其中  $A$  為實數，則  $A =$ \_\_\_\_\_。
9. 座標平面上一圓通過  $A(1, 1)$ ， $B(3, 3)$  兩點，且與直線  $y = 0$  相切於  $C$  點，則  $C$  點座標為\_\_\_\_\_。

【背面尚有試題】

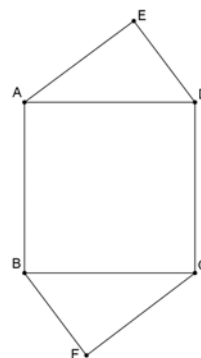
10. 已知  $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ，試利用此公式求：

$$(1^2 + 2^2) + (4^2 + 5^2) + (7^2 + 8^2) + \cdots + (103^2 + 104^2) + (106^2 + 107^2) = \underline{\hspace{2cm}}。$$

11. 已知  $f(x) = -2 \times \frac{(x-102)(x-104)}{(100-102)(100-104)} + 2 \times \frac{(x-100)(x-104)}{(102-100)(102-104)} + 2 \times \frac{(x-100)(x-102)}{(104-100)(104-102)}$ ，當  $x = a$  時， $f(x)$  有最大值  $M$ ，試求序對  $(a, M) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 正方形  $ABCD$  的邊長為 10，點  $E$  與點  $F$  為正方形外兩點，如右圖，

使得  $\overline{BF} = \overline{DE} = 6$  與  $\overline{AE} = \overline{CF} = 8$ ，試求  $\overline{EF}$  為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



13. 設  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，則  $\frac{x^{12}-89}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

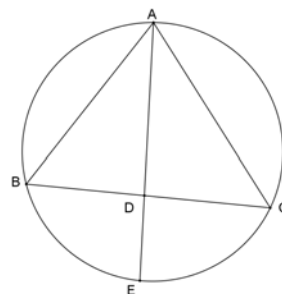
14. 從正整數  $1, 2, 3, \dots, n$  中任取相異的兩個數相乘，共可得到  $\frac{n(n-1)}{2}$  個乘積。若這些乘積的算術平均數為 55，則  $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、計算題【16 分，各 8 分】請寫出計算過程，否則不予計分！

如圖， $\triangle ABC$  中， $\angle A$  的內角平分線  $AD$  交外接圓於點  $E$ ，

(1) 試證  $\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{AD}^2 + \overline{BD} \times \overline{CD}$ 。

(2) 若  $\overline{AB} = 21$ ， $\overline{AC} = 28$ ， $\overline{AD} = 12$ ，試求  $\overline{BC}$ 、 $\overline{DE}$  長度？



【試題至此結束】