

2021 年第 21 屆亞洲物理奧林匹亞競賽及 第 51 屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2020 年 11 月 7 日

13：30~16：30

考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

- 1、本試題包括選擇填充混合題三十格及計算題兩大題，合計總分為 150 分。
- 2、選擇填充混合題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
- 3、計算題部分，請在答案卷指定之位置作答。
- 4、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。
- 5、限以藍色或黑色原子筆作答。

2021 年第 21 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 51 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題

※本試題含選擇填充混合題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

壹、選擇填充混合題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

一、直徑為 15 公分的平面鏡，置於某人臉之前方 d 公分時，某人恰好可以看到自己長度為 ℓ 公分的整張臉。若將鏡子水平移到 $2d$ 公分時，下列敘述何者正確？(1)。

(單選，以 A、B、C 和 D 作答)

- (A) 某人只能看到自己 ℓ 公分的整張臉；
- (B) 某人除了可以看到長度為 ℓ 公分的整張臉，還可以看到臉下方 15 公分的上半身；
- (C) 某人除了可以看到長度為 ℓ 公分的整張臉，還可以看到臉下方 d 公分的上半身；
- (D) 某人除了可以看到長度為 ℓ 公分的整張臉，還可以看到臉下方 ℓ 公分的上半身。

二、一束單色雷射光穿過三層不同固體材料的路徑如右圖 1，其路徑如箭頭線段所示，其中材料的折射率由上而下分別是 n_1 、 n_2 、 n_3 ，光線和垂直界面虛線的夾角則分別為 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 ，且兩虛線相互平行。下列哪一個選項無法讓 θ_3 增大？(2)。(單選，以 A、B、C 和 D 作答)

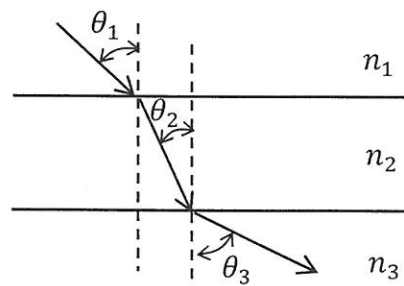


圖 1

- (A) 所有材料的折射率保持不變，增大 θ_1 ，
- (B) 入射角 θ_1 保持不變，增大 n_1 ，
- (C) 入射角 θ_1 保持不變，減小 n_2 ，
- (D) 入射角 θ_1 保持不變，減小 n_3 。

三、一垂直懸吊的理想彈簧，其力常數和原長分別為 k 、 L ；在其下方吊掛一質量 m 、半徑 r 的球體，而使得彈簧伸長。此球受一衝量作用後，使其進行鉛直方向振盪，而振幅 A 是靜止時彈簧伸長量的二分之一。在沒有阻力消耗能量的情形之下，此球體在平衡位置上方 $A/3$ 處的運動速率為 (3)。

四、一輛質量為 M 的賽車在傾斜賽車道上做等速率圓周運動，如圖 2 所示，圓周半徑為 R ，賽道斜面傾角為 θ 。已知賽道與賽車間的靜摩擦係數為 μ_s 。車內之車頂懸掛了一個長度為 ℓ 的單擺，擺錘質量 m (擺錘質量遠小於車體質量)，擺繩以一穩定夾角偏離鉛垂線。

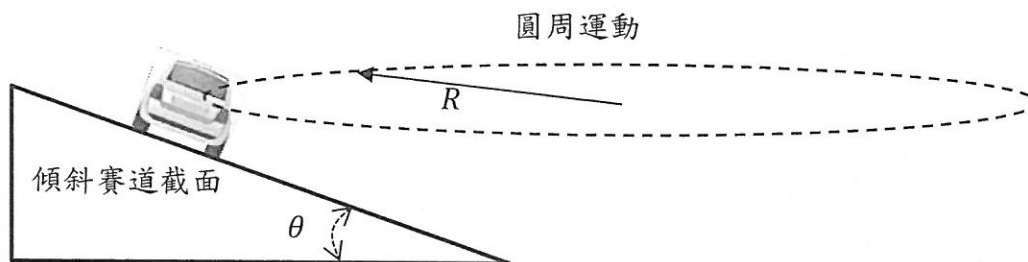


圖 2

(a) 欲維持在此圓周軌跡上行駛，此車可行駛的最大速率為下列何者？____(4)____。

(單選，以 A、B、C 和 D 作答)

(A) $\sqrt{\frac{gR(\sin\theta + \mu_s \cos\theta)}{\cos\theta - \mu_s \sin\theta}}$, (B) $\sqrt{\frac{MgR(\sin\theta + \mu_s \cos\theta)}{m(\cos\theta - \mu_s \sin\theta)}}$,

(C) $\sqrt{\frac{gRm(\sin\theta - \mu_s \cos\theta)}{M(\cos\theta + \mu_s \sin\theta)}}$, (D) $\sqrt{\frac{gR(\sin\theta - \mu_s \cos\theta)}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta}}$

(b) 當賽車在傾斜賽道上以最大可行速率進行半徑 R 之等速圓周運動時，擺繩與鉛垂線之夾角為____(5)____。

(c) 當賽車在傾斜賽道上以最大可行速率進行半徑 R 之等速圓周運動時，若擺錘受到微擾而輕微左右擺盪，則此擺盪週期為____(6)____。

五、如圖 3 所示，在電子秤上有一個裝有水的容器，秤上的讀數為 500 g。已知將重量為 500 gw 的沉體甲放入該容器時恰好讓水達到滿水位，如圖(a)；又已知將重量為 300 gw 的浮體乙置入容器中也剛好讓水達到滿水位，如圖(b)。將甲和乙物體同時置入容器中再將容器放在電子秤上秤重，如圖(c)；則(a)、(b)和(c)的三種情況下，電子秤讀數的為何？下列正確選項是：____(7)____。(單選；以 A、B、C 和 D 作答)

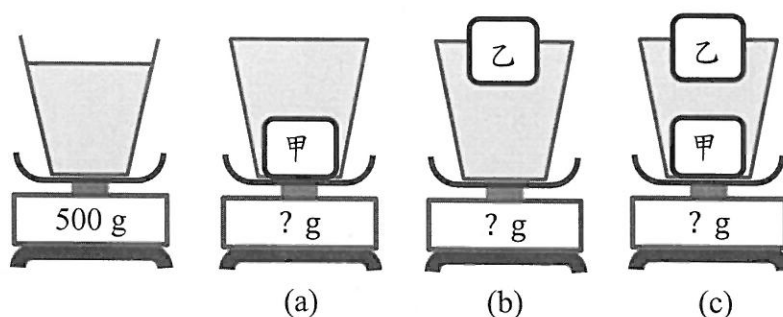


圖 3 利用電子秤進行各種狀況的測量。

- | | | |
|-------------------|--------------|---------------|
| (A) (a)的讀數為800 g | (b)的讀數為600 g | (c)的讀數為1300 g |
| (B) (a)的讀數為1000 g | (b)的讀數為800 g | (c)的讀數為1000 g |
| (C) (a)的讀數為1000 g | (b)的讀數為800 g | (c)的讀數為800 g |
| (D) (a)的讀數為 800 g | (b)的讀數為600 g | (c)的讀數為1200 g |

已知乙的體積為甲的 2.5 倍，則乙物體的密度是 (8) g/cm^3 。

六、重力儲能裝置是一個在離峰用電時，將多餘的電能以重力位能方式儲存的裝置，在需要時再將重力位能轉換而釋放出電能，以提供使用。目前的構想是利用在廢棄礦坑中的重物，用提高坑道重物的位置以達儲能目的，如右圖 4 所示。已知某一個重力儲能測試裝置，重力位能轉換為電能的效率達 90%，重物為 10^4 kg ，當由靜止釋放重物時，在某一短暫時間後即可達到穩定等速釋放位能，在此時輸出電能功率恰為 10^6 W ，則最接近重物的速度為何下列何者？(9) (單選，以 A、B、C 和 D 作答)

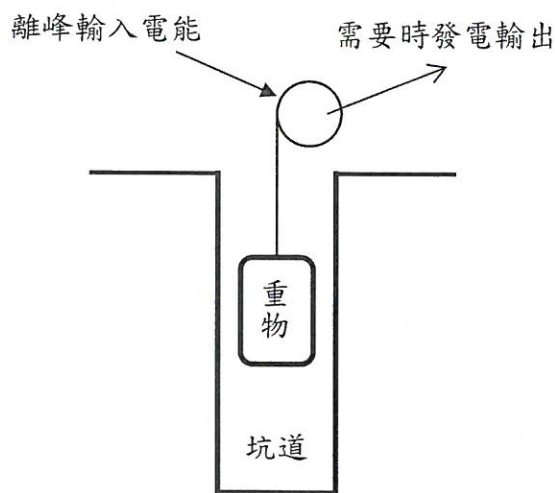


圖 4

(A) 1 m/s (B) 11 m/s (C) 52 m/s (D) 111 m/s 。

七、一質量為 $m = 1 \text{ kg}$ 、半徑為 $R = 1.0 \text{ m}$ 的剛體圓環，最初在光滑水平桌面靜止不動。於時間 $t = 0$ 時，有一個 10 N 的力 \vec{F} 作用於圓環的頂端，使得圓環保持向右直線運動，且不論圓環的如何運動，此力持續作用於圓環的頂端，如圖 5 所示；則 10 秒之後，圓環質心與初始位置的距離為 (10) 公尺，此時 \vec{F} 所做的功為 (11) 焦耳。

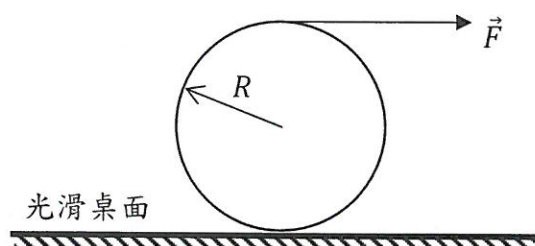


圖 5

10000 J

八、台北 101 大樓的高層容易受到風力影響而產生擺動，如果擺動太大會使住戶產生不適感，因此為了降低建築物的擺動，裝設了抗風阻尼器，為一類似單擺的金色大圓球。抗風阻尼器的作用是利用加裝的物體(如 101 大樓的金色大圓球)相對大樓之振盪產生類似

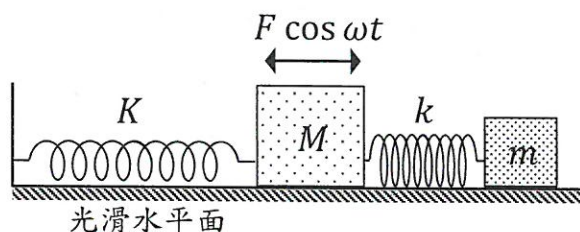


圖 6

阻尼的效果，以降低大樓的擺動。物理上可以如圖 6 所示之彈簧系統來模擬抗風阻尼器的作用；其中以置放在光滑水平面上之質量為 M 與 m 的木塊分別代表大樓(如 101 大樓)與抗風阻尼器(如金色大圓球)，而力常數為 K 與 k 之彈簧則分別用以模擬大樓本身擺動時的恢復力以及阻尼器的恢復力，風力則以 $F \cos \omega t$ 表示，作用於 M 。若

不考慮摩擦力及阻力，當風力的振盪頻率 $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$ 時，如果沒有阻尼器，大樓的擺動振幅將會是無限大！此時如果適當選取抗風阻尼器的振盪頻率，則可以使大樓穩定擺動之振幅最小。試問在已知 K 、 M 與 m 的條件下，使得大樓穩定擺動時振幅最小的 k 為(12)，此時大樓穩定擺動之振幅為(13)。

九、一均勻長圓柱形、長度 L ，質量 m_1 的浮標，下方以質量可忽略的細線連結一質量為 m_2 的小鉛錘，上方停了一隻質量為 M 的蜻蜓，浮標在水中靜止不動。試問當蜻蜓飛離後，浮標上浮過程中的最大速度為(14)。已知浮標的密度 ρ_1 ，水的密度 ρ_w ， $M \ll (m_1 + m_2)$ ，若過程中摩擦力均可忽略，且不考慮蜻蜓飛離浮標瞬間的作用力，即蜻蜓飛離的速度無限小。

十、一個質量為 M 半徑為 R 的均勻圓盤繞其中心轉軸(與盤面垂直)自由轉動，而該中心轉軸垂直固定在無摩擦的水平面上。今在離圓盤中心 $R/2$ 處安裝一小馬達，固定在圓盤上且其質量可忽略，馬達的鉛直轉軸固定安裝在一小圓盤的中心，小圓盤的質量為 m 、半徑為 $R/2$ ，如下圖 7 所示。此二圓盤系統由靜止開始，啟動小馬達使半徑為 $R/2$ 的圓盤的轉速固定為 ω ，此時半徑為 R 的圓盤子的轉速 Ω 應為下列何者？(15) (單選，以 A、B、C 和 D 作答) 【註】：圓盤繞其中心轉軸的轉動慣量 I 為 $I = MR^2/2$ 。

(A) $\omega m/(4M + 2m)$

(C) $\omega m/(2M + m)$

(C) $\omega m/(4M)$

(D) $\omega m/(2M)$

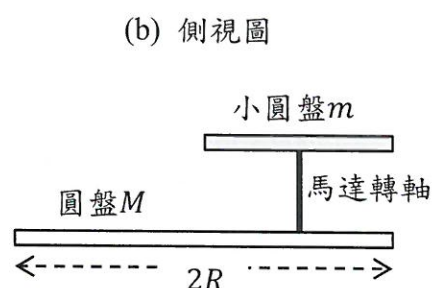
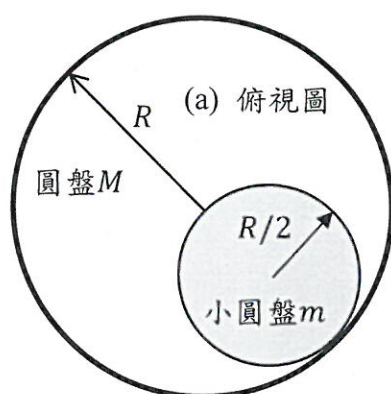


圖 7 圓盤、馬達和小圓盤系統示意圖：(a) 俯視圖，(b) 側視圖。

- 十一、 如右圖 8 所示，一個碗形木塊靜止置放在一光滑水平面上，碗形木塊質量為 $2m$ ，內部為一半徑為 R 、原點為 O 之半球面。有一半徑為 r 、質量為 m 之實心均勻小球由碗邊自靜止滾落。假設滾落過程中，小球做純滾動運動，且小球繞球心轉動的轉動慣量為 $\frac{2}{5}mr^2$ ，試問當小球達到碗底最低點時，碗形木塊的速度為 (16)。

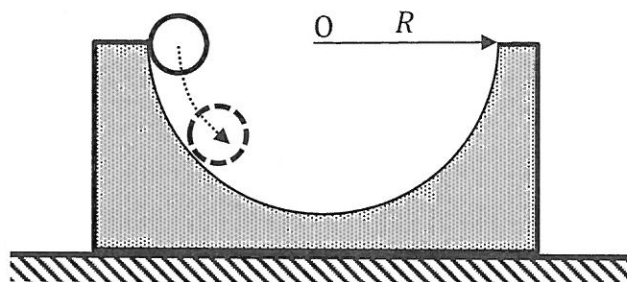


圖 8

- 十二、 在無摩擦的光滑水平桌面上，有一質量為 m 的小球(體積不計)，以 v_0 速度往右垂直射向靜止平放於桌面上之均質細桿尾端，其質量為 M ，長度為 ℓ ；
- (a) 若細桿一端被無摩擦之支點釘住，且細桿可對支點自由旋轉而無摩擦，如圖 9(a) 所示，且小球入射後就黏在細桿的尾端，則此細桿的角速率為 (17)。
- (b) 若細桿沒有被支點釘住，可自由運動，如圖 9(b) 所示；且小球入射後就黏在細桿的尾端，則此時細桿的角速率為 (18)。

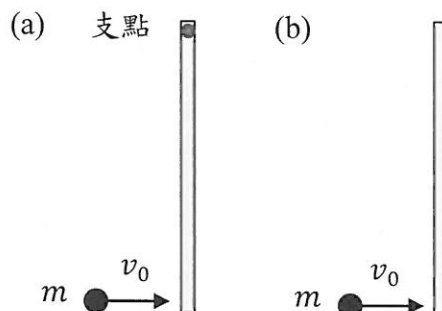


圖 9 (a) 有支點釘住的細桿，(b) 無支點釘住的細桿。

【註】：(1) 細棍對於通過中點之垂直轉軸的轉動慣量為 $\frac{M\ell^2}{12}$ 。(2) 轉動慣量之平行軸定理： $I = I_C + Md^2$ ，其中 I 為質量 M 剛體對一特定轉軸的轉動慣量， I_C 為剛體對於以質心為轉軸的轉動慣量、 d 為該特定轉軸與質心轉軸之垂直距離，且此特定轉軸也與質心軸平行。

- 十三、 如圖 10 所示，一太空船原先沿著一橢圓軌道繞著一行星運轉，太空船與行星的最近距離為 R ，最遠距離為 $2R$ 。已知太空船在距行星距離為最遠時，其運動速率為 v_0 ；若此時太空船啟動推進器，並進入一半徑為 $2R$ 的圓形軌道，則該太空船在圓形軌道的速率為下列何者？(19) (單選，以 A、B、C 和 D 作答)

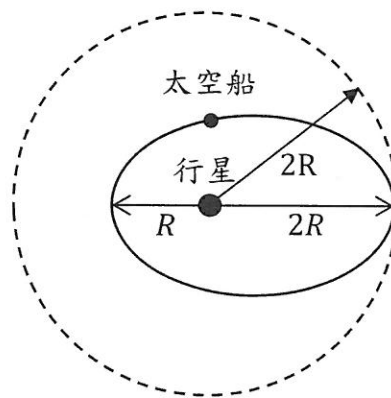


圖 10

- (A) $\sqrt{\frac{3}{2}}v_0$ ， (B) $\sqrt{5}v_0$ ，
(C) $\sqrt{\frac{3}{5}}v_0$ ， (D) $\sqrt{2}v_0$ 。

十四、 有一種探尋黑洞的方法是觀測雙星系統的運動規律，並從中推測黑洞的質量等性質。雙星模型的主要假設為：在遠離其他天體的空間中，兩顆距離較近的天體圍繞著二者中心連線上的系統質心作等速率圓周運動，兩顆天體的角速率相等，且二者間之距離維持不變，並為兩天體作等速率圓周運動的軌道半徑和；如圖 11 所示。

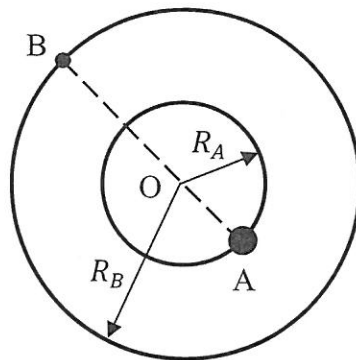


圖 11

- (a) 已知 A 星體是一個質量為 m_A 、半徑為 r_A 的黑洞，而 B 星體是一個質量 m_B 、半徑為 r_B 的發光星體，且地球恰好在此雙星相互繞行運動的平面上。在地球上所觀測到發光星體的發光強度與時間的關係，如下

圖 12 所示。已知此雙星系統軌道半徑遠大於雙星星體的半徑，即 $R_A, R_B \gg r_A, r_B$ ，但遠小於兩星球與地球的距離；則由圖 12 判斷雙星的半徑比 r_B/r_A 為下列何者？(20)。(單選，以 A、B、C 和 D 作答)

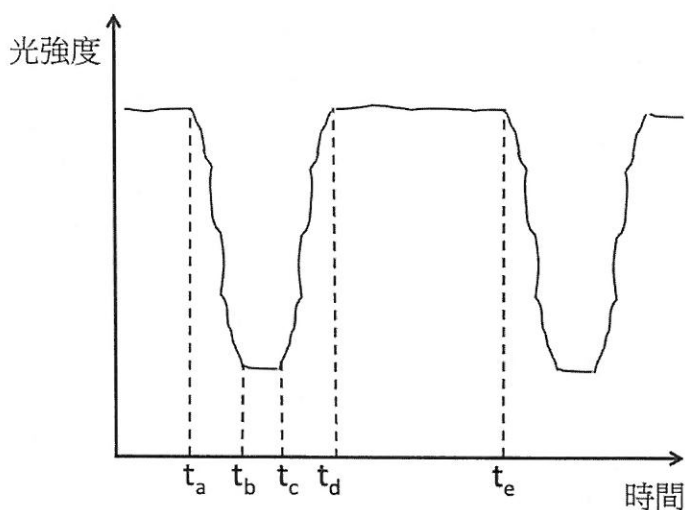


圖 12

- (A) $\frac{t_a}{t_b}$ (B) $\frac{t_b}{t_c}$
(C) $\frac{t_e - t_a}{t_e - t_d}$ (D) $\frac{t_b - t_a}{t_c - t_a}$

- (b) 設重力常數為 G ；則雙星的相對運動速度大小為 (21)。

- (c) 若發光星體 B 的速率為 $v_B = 2.7 \times 10^5 \frac{m}{s}$ ，運行週期 $T = 4.7\pi \times 10^4 s$ ，質量 $m_B =$

$6m_S$ ，其中 $m_S = 2.0 \times 10^{30} kg$ 為太陽的質量，重力常數 $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$ ，

則該黑洞 A 的質量約為太陽質量的 (22) 倍。(取整數)

十五、 考慮一個單原子理想氣體，若以 p 、 V 與 T 分別代表氣體之壓力、體積與絕對溫度，以 k_B 代表波茲曼常數，以 m 代表氣體每個分子的質量，以 n 代表氣體分子的莫耳數，以 R 代表通用氣體常數，則此氣體每單位質量的定容熱容(即其定容比熱)為何？(23) (單選，以 A、B、C 和 D 作答)

- (A) $\frac{3pV}{2T}$ (B) nR (C) $\frac{3}{2}R$ (D) $\frac{3}{2} \frac{k_B}{m}$

現在考慮一可壓縮的單原子理想氣體，在不受任何超距力(包括重力)的作用下，以絕熱方式穩定流動，在流速為 v 處，氣體之壓力為 p ，密度為 ρ 。已知穩定流動時，此氣體在流線上各點的 $\frac{1}{2}v^2 + a(p/\rho)$ 均相等，則式中的係數 a 為(24)。(提示：若視氣體為不可壓縮時，則其內能不會改變，因此會得到 $a = 1$ ，因為能量守恆式中不會將內能加入考慮。)

- 十六、太空中裝有氫氣的密封圓柱形容器以等加速度 a ，沿著圓柱軸向作直線運動；而此等加速度運動會使得圓柱形容器兩端氣體分子數密度(即每單位體積的分子數目)呈現些微差異。若氫氣可以視為理想氣體，且管長為 $\ell = 100\text{ cm}$ ，管中氣體溫度恆定維持在 $T = 330\text{ K}$ 。在某直線加速度作用下，圓柱管兩端氣體分子數密度的差異為 0.1% ，而此差異會造成該圓柱管兩端壓力也有些微差異，則兩端壓力差異為(25)%(以百分比表示)；又氫氣的分子量約為 40 g/mole ，則圓柱管的加速度為(26) m/s^2 。

提示：地表面重力場中空氣分子數密度遵循波茲曼分布定律： $n(h) = n_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$ ，其中 $n(h)$ 為高度為 h 處分子數密度(單位體積中的分子數)， n_0 為地表處分子數密度， M 為空氣的平均莫耳質量， g 為重力加速度， $R = 8.31\text{ J/mol}\cdot\text{K}$ 為氣體常數。

- 十七、外太空中一質量為 m 、表面積為 A 、絕對溫度為 T_0 的實心球狀物體，對外以熱輻射的方式降溫。球的單位質量的比熱為 c ，若不考慮吸收其他熱源的輻射熱，且球可以視為黑體，則當球的溫度降為原來溫度的十分之一，需費時(27)。

【註】：若一物體表面的絕對溫度為 T ，發射率為 e ，則該物體表面每單位面積在每單位時間內所輻射出的電磁波能量，稱為輻射能通量密度， $J = e\sigma T^4 (\text{Js}^{-1}\text{m}^{-2})$ ，式中 $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} (\text{Js}^{-1}\text{m}^{-2}\text{K}^{-4})$ ，稱為史特凡-波茲曼常數。通常 $e < 1$ ，但對黑體而言， $e = 1$ (即為完全輻射)。

積分公式： $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ，其中 C 為常數，視積分上下限而定。

- 十八、有一個質量為 m 、力常數為 k 的非理想均質彈簧。將此彈簧的左端固定、右端則掛上質量為 M 的質點，並讓質點在光滑的水平面上做週期運動，其振盪頻率為 ω_1 。已知當 $M \gg m$ 時， ω_1 滿足方程式： $k\omega_1^{-2} = M + m/3$ (準確到 m 的一階)。今將同樣的彈簧兩端都掛上質量為 M 的質點，若其振盪頻率為 ω_2 ，則 $k\omega_2^{-2} = \underline{(28)}$ 。

接著考慮將同樣的彈簧左、右兩端分別掛上質量為 M_a 、 M_b 的質點，若其振盪頻率

ω_3 滿足 $k\omega_3^{-2} = \left\{ \frac{\alpha_0 M_a^2 + \alpha_1 M_a M_b + \alpha_2 M_b^2}{(M_a + M_b)} \right\} + \left\{ \frac{m(\beta_0 M_a^2 + \beta_1 M_a M_b + \beta_2 M_b^2)}{(M_a + M_b)^2} \right\}$ ；其中第一項是 $m = 0$

的結果，而第二項是因為彈簧質量 m 所造成的修正項；因此可以用因次分析及之前的結果，分析出 $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = \underline{(29)}$ ， $(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = \underline{(30)}$ 。

計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

一、噴泉水柱

由兩個相同的空心圓柱罐和一個圓柱杯黏合成一個垂直堆疊的噴泉系統，如圖 13 所示。空心圓柱罐的高度為 H ；且截面積與圓柱杯相同。在杯和罐黏合處、和罐與罐黏合處都鑽有兩個孔洞，並將三隻玻璃吸管 A、B、C，插入堆疊的系統。A 吸管的長度為 h ，由杯連接至下方第一個圓柱罐接近底部，同時高出杯的水面可以噴水。B 吸管由杯的底端連結到下方第二個圓柱罐接近底部的位置。C 吸管連接兩個圓柱罐，開口都是在罐中的空氣部分，所以 C 管中都是空氣。除了 A 吸管上方與大氣接觸外，整個系統都是密閉的，但是各容器中的初始的水位高度分別為 W_0 、 W_1 與 W_2 。假設黏滯效應可以忽略，且罐和杯容器的截面積遠大於吸管的截面積；在 A、B 吸管中保持有水狀況，且管中沒有氣泡，吸管 A 初始時下端為封閉，開啟後會噴水。已知大氣壓為 P_0 ，水的密度為 ρ ，重力加速為 g ；則

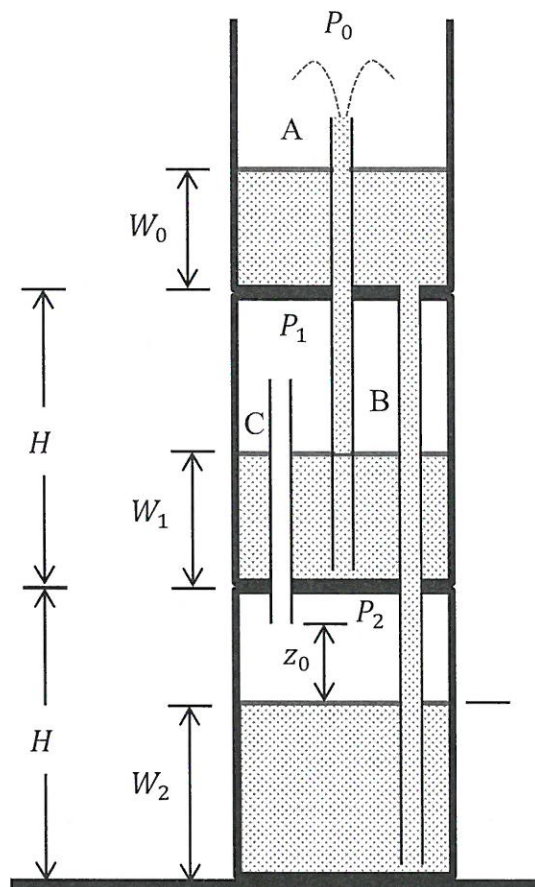


圖 13

- 當吸管 A 的下端被封閉時，則吸管 C 上、下兩端的空氣壓力 P_1 和 P_2 各為何？(3 分)
- 當吸管 A 的下端被開通時，水自吸管 A 的上端噴出，求最初噴出水柱所能到達的最高點與吸管 A 管口的距離。(4 分)
- 因為噴出的水全部都流向最低的圓柱罐；當噴水停止時，最下方圓柱罐的水位仍在吸管 C 底端之下。設最初吸管 C 的底端與水面的距離為 z_0 ，當噴泉停止時，兩者的距離改變為 $z_0 - \Delta z$ ，求 Δz 表示式。(4 分)
- 假設噴水過程整體系統保持溫度不變，則當噴水停止時，中間圓柱罐的水位為何？(4 分)

全部流向圓柱杯不及最低

罐中空氣可以視為理想氣體

二、推動木塊

一個均質的長方體木塊，重量為 W ，厚度為 $2b$ ，高度為 h ，最初靜置於水平桌面上(如圖14)；木塊底部與桌面之間的靜摩擦係數 $\mu_s < b/h$ ，動摩擦係數 $\mu_k < \mu_s$ 。今垂直於木塊右側表面的頂邊，於其寬度中點處對木塊施一水平向左、量值固定為 F 的定力。

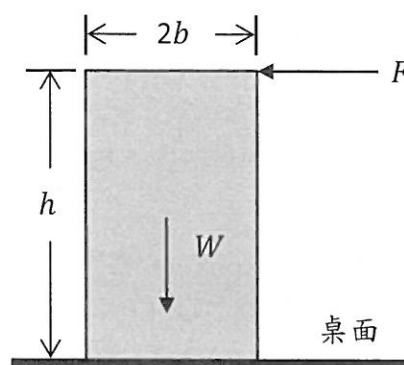


圖 14

- (a)若此木塊受到定力 F 作用會向左滑動，但不會轉動的條件為何？(寫出相關方程式，並註明相關的物理量。)並求出定力 F 的量值範圍為何？(寫出 F 範圍的不等式，以 b 、 h 、 W 和 μ_s 等表示之。)(9分)
- (b)若在此木塊已向左滑動後，對木塊施一量值固定為 F' 的水平定力，且 F' 的施力點、作用線與方向，均與上述定力 F 相同，而木塊不會轉動，但可以不停地向左滑動，則水平力 F' 的量值範圍為何？(寫出 F' 範圍的不等式，以 b 、 h 、 W 和 μ_k 等表示之。)(6分)