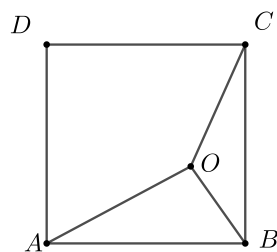


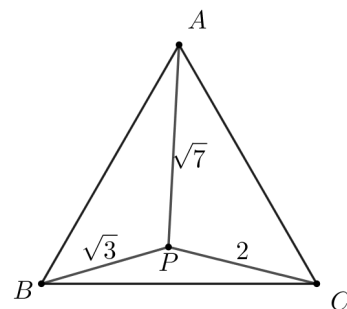
一、填充題：每格5分，共80分。

1. 將與 105 互質的所有正整數由小到大排成一個數列，則此數列的第 2018 項為 _____。
2. 已知兩相異實數 α, β 為二次方程式 $3x^2 - 4x - 2 = 0$ 的兩根，則 $(3 - \alpha)(3 - \beta) =$ _____。
3. 設 $f(x) = x^{16} + x^8 + x^4 + x^2 + x + 3$ 除以 $x^3 - 1$ 的餘式為 _____。
4. 試求 $\sum_{n=2}^{10} \left(\frac{1}{n^2 - 1} \right) =$ _____。
5. 函數 $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 滿足 $f(0) = 0$ ， $f(x) + f(1 - x) = 1$ ， $f\left(\frac{x}{5}\right) = \frac{1}{2}f(x)$ ，且當 $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ 時， $f(x_1) \leq f(x_2)$ ，則 $f\left(\frac{1}{2018}\right) =$ _____。
6. 如右圖，已知四邊形 $ABCD$ 為正方形，已知 $\overline{OA} = \sqrt{3}$ ， $\overline{OB} = 1$ ， $\overline{OC} = \sqrt{2}$ ，試求正方形 $ABCD$ 的面積為 _____。



7. 已知一正實數數列 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列，且滿足 $a_1 \cdot \log a_1 + a_2 \cdot \log a_2 + a_3 \cdot \log a_3 + \cdots + a_{2018} \cdot \log a_{2018} = 1$ ， $a_1 \cdot \log a_{2018} + a_2 \cdot \log a_{2017} + a_3 \cdot \log a_{2016} + \cdots + a_{2018} \cdot \log a_1 = 2$ ，則 $(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2018}) \cdot \log(a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2018}) =$ _____。
8. 求 $\sqrt[5]{103 - x} + \sqrt[5]{x - 21} = 2$ 的所有實數解為 _____。
9. 假設 $x^{12} + 7x^{11} + 1 = 0$ 的 12 個根分別為 x_1, x_2, \dots, x_{12} ，試求 $(x_1^2 - x_1 + 1)(x_2^2 - x_2 + 1) \cdots (x_{12}^2 - x_{12} + 1) =$ _____。
10. 有 12 位同學身高均不相等，要排 2 列 6 行，每一列高的從左至右，每一行前列高於後列，試問有 _____ 種排法。

11. 若 $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ，而 $a + b + c + d + e + f = 10$ ， $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = 20$ ，假設 a 的最大值為 M ， a 的最小值為 m ，求 $M^2 + m^2 =$ _____。
12. 設函數 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 為嚴格遞增函數，若 $x, y \in \mathbb{N}$ 時， $f(x+y) = x+y$ ，求 $f(2018) =$ _____。
13. 設方程式 $x + 2^x = 4$ 的實根為 α ， $2^{4-x} = x$ 的實根為 β ，試求 $\alpha + \beta =$ _____。
14. 給定二次多項式 $f(x) = 3 \cdot \frac{(x - \sqrt{3})(x - \sqrt{5})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{5})} + 4 \cdot \frac{(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{5})} + 6 \cdot \frac{(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{3})}$ ，則 $f(10) =$ _____。
15. 試求從 2700 的正因數中任取 a, b, c 三個，使得 a 是 b 的因數， b 是 c 的因數的機率 = _____。
16. 如右圖，已知 P 為正三角形 $\triangle ABC$ 內部一點，若 $\overline{PA} = \sqrt{7}$ ， $\overline{PB} = \sqrt{3}$ ， $\overline{PC} = 2$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為 _____。



二、計算證明題：(共20分)

1. (8 分) 設 a, b, c 為相異正實數，滿足

$$\begin{cases} abc = 1000 \\ bc(1-a) + a(b+c) = 110 \end{cases}$$

若 $a < 1$ ，試證 $10 < b < 100, 10 < c < 100$ 。

2. (4 分) 已知函數 $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 滿足以下條件：

$$\text{對任意兩相異實數 } x, y \quad |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

試證明至多有一個實數 a 滿足 $f(a) = a$ 。

3. (8 分) 給定任意非負實數 $a, b, c, d \geq 0$ ，試證 $(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2)(d^2 + 2) \geq 4(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$ 。