

國立彰化高中 111 學年度學科能力競賽校內初賽數學科答案卷 參考答案

說明：請將答案化至最簡並有理化。

考試日期：112.06.01

一、填充題：每格 4 分，共 60 分

1	2	3	4
$\frac{120}{11}$	$\frac{5}{6} \vee \frac{6}{5}$	1001	$\frac{1}{56}$
5	6	7	8
$\frac{1}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{4}$	48	-100
9	10	11	12
$6\sqrt{6}$	800	12960	32
13	14	15	
$\frac{11}{4}$	$9\pi$	$\frac{11}{13}$	

二、計算證明題：請自行書寫於題目下方空白處 (共40分)

1. 已知  $0 < a < 1$ ，實數  $x, y$  滿足  $x^2 + y = 0$ 。試證： $\log_a (a^x + a^y) \leq \log_a 2 + \frac{1}{8}$ 。

解：  $a > 0$  可得  $a^x > 0, a^y > 0$ ，再由算幾不等式得  $a^x + a^y \geq 2\sqrt{a^x \times a^y} = 2a^{\frac{x+y}{2}}$  (2 分)，又底數  $a \in (0, 1)$  表示

$$\begin{aligned}
 \log_a (a^x + a^y) &\leq \log_a 2a^{\frac{x+y}{2}} \text{ (2分)} \\
 &= \log_a 2 + \frac{x+y}{2} = \log_a 2 + \frac{1}{2} (x - x^2) \text{ (2分)} \\
 &= \log_a 2 + \frac{1}{2} \left( -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right) \text{ (2分)} \\
 &\leq \log_a 2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \log_a 2 + \frac{1}{8} \text{ (2分)}
 \end{aligned}$$

2. 在直角三角形  $ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = c$ ， $\overline{BC} = a$ ， $\overline{CA} = b$ ，試証：

(1) (8 分)  $c < a + b \leq \sqrt{2}c$

(2) (2 分)  $a + b = \sqrt{2}c$  之充要條件為  $a = b$

解：

- (1) 由三角不等式得  $c < a + b$  (2 分)  
畢氏定理得  $c^2 = a^2 + b^2$  (1 分)，再由算幾不等式得  $c^2 = a^2 + b^2 \geq 2ab$  (2 分)，

$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \\
 &\leq c^2 + c^2 = 2c^2 \text{ (2分)}
 \end{aligned}$$

綜合上述  $c < a + b \leq \sqrt{2c^2} = \sqrt{2}c$ 。(1 分)

- (2) 由算幾不等式充要條件可得。

3. 設  $a, b, c$  均為正數，且滿足  $a+b+c=1$ 。試證： $\frac{1}{\sqrt{1-a}} + \frac{4}{\sqrt{1-b}} + \frac{9}{\sqrt{1-c}} \geq 6\sqrt{6}$ 。

解：由柯西不等式得

$$\begin{aligned} (\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c})^2 &\leq (1^2 + 1^2 + 1^2) \left( (\sqrt{1-a})^2 + (\sqrt{1-b})^2 + (\sqrt{1-c})^2 \right) \\ &= 3(3 - (a+b+c)) = 6 \text{ (5分)} \end{aligned}$$

再由柯西不等式得

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\sqrt{1-a}} + \frac{4}{\sqrt{1-b}} + \frac{9}{\sqrt{1-c}} \right) (\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c}) &\geq (1+2+3)^2 = 36 \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-a}} + \frac{4}{\sqrt{1-b}} + \frac{9}{\sqrt{1-c}} &\geq \frac{36}{\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c}} \geq \frac{36}{\sqrt{6}} = 6\sqrt{6} \text{ (5分)} \end{aligned}$$

4. 已知  $\triangle ABC$  中， $\angle ABC = 2\angle ACB$ ，試證：

(1) (6 分)  $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB} \cdot \overline{BC}$

(2) (4 分)  $\overline{AB} + \overline{BC} < 2\overline{AC}$

解：為討論方便，令  $\angle ACB = \theta$ ,  $\angle ABC = 2\theta$ ，則  $\angle BAC = 180^\circ - 3\theta$ ，易得  $0^\circ <$

$\theta < 60^\circ$ 。由正弦定理可知  $\frac{\overline{AB}}{\sin \theta} = \frac{\overline{AC}}{\sin 2\theta} = \frac{\overline{BC}}{\sin (180^\circ - 3\theta)} = \frac{\overline{BC}}{\sin 3\theta} \Rightarrow$

$$\overline{AC} = 2\overline{AB} \cos \theta \text{ (1 分)}$$

(1) 由餘弦定理可得

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos 2\theta \text{ (1分)}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \times \overline{BC} \times \cos \theta \text{ (1分)}$$

兩式相減並同類項合併得

$$2\overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2 - 2\overline{BC} \times (\overline{AB} \cos 2\theta - \overline{AC} \cos \theta) \text{ (1分)}$$

$$= 2\overline{AB}^2 - 2\overline{BC} \times (\overline{AB} \cos 2\theta - 2\overline{AB} \cos^2 \theta)$$

$$= 2\overline{AB}^2 - 2\overline{BC} \times \overline{AB} (\cos 2\theta - 2\cos^2 \theta) \text{ (1分)}$$

$$\stackrel{\text{二倍角}}{=} 2\overline{AB}^2 + 2\overline{BC} \times \overline{AB} \text{ (1分)}$$

$$\text{得 } \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB} \cdot \overline{BC}。$$

- (2) 由前面正弦定理等式、二倍角公式與三倍角公式得  $\overline{BC} = \frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta} \times \overline{AC} = \frac{3-4\sin^2 \theta}{2\cos \theta} \times \overline{AC} = \frac{-1+4\cos^2 \theta}{2\cos \theta} \times \overline{AC}$  且  $\overline{AB} + \overline{BC} = \frac{\sin \theta + \sin 3\theta}{\sin 2\theta} \times \overline{AC} = 2\cos \theta \overline{AC} \text{ (1 分)}$ ，

$$(\overline{AB} + \overline{BC})^2 = \overline{AB}^2 + 2\overline{AB} \times \overline{BC} + \overline{BC}^2$$

$$= \overline{AC}^2 + \overline{AB} \times \overline{BC} + \overline{BC}^2 \text{ (1分)}$$

$$= \overline{AC}^2 + \overline{BC} \times (\overline{AB} + \overline{BC})$$

$$= \overline{AC}^2 + \frac{-1+4\cos^2 \theta}{2\cos \theta} \overline{AC} \times 2\cos \theta \overline{AC} = 4\cos^2 \theta \overline{AC}^2 \text{ (1分)}$$

$$\text{故 } \overline{AB} + \overline{BC} = 2|\cos \theta| \overline{AC} < 2\overline{AC} \text{ (1 分)}$$