

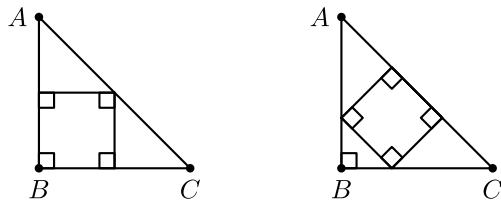
國立彰化高中 111 學年度學科能力競賽校內初賽數學科試題

班級：_____年_____班 座號：_____ 姓名：_____

一、填充題：每格4分，共60分。

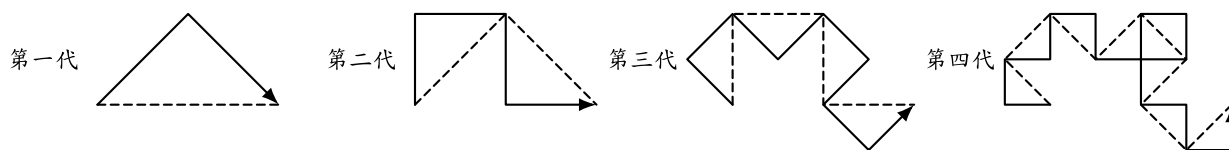
1. 對任意正整數 n ，令 $a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$ ，求 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} =$ _____。
2. 若 x, y, z 均為正數，且滿足 $x + \frac{1}{y} = \frac{7}{2}, y + \frac{1}{z} = \frac{8}{15}, z + \frac{1}{x} = 7$ ，試求 $xyz =$ _____。
(即 x, y, z 的乘積。)
3. 若 a, b, c, d 皆為非負整數，則滿足 $a \leq b \leq c \leq d \leq 10$ 的整數解 (a, b, c, d) 共有 _____ 組。
4. 設 $f(x)$ 為次數等於 110 的實係數多項式，且滿足對 $k = 1, 2, 3, \cdots, 111$ ， $f(k) = \frac{1}{k}$ ，則 $f(112) =$ _____。
5. 化簡 $\frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}}{\sqrt{20 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{10} - \sqrt{2}} =$ _____。
6. $\cos 108^\circ =$ _____。

7. 已知 m 為整數，且滿足 $\sqrt{m^2 - 24m + 111}$ 為一個整數，則 m 所有可能的和為 _____。
8. 數列 $\langle a_n \rangle$ ： a_1, a_2, a_3, \dots 滿足 $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}, n \geq 3$ ，且 $a_{110} = 100, a_{2023} = 200$ ，求 $a_{111} =$ _____。
9. 給定空間中三個點 $A(1, 2, 3)$ 、 $B(6, 5, 4)$ 、 $C(7, 8, 9)$ ，則 $\triangle ABC$ 面積為 _____。
10. 設 $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形，依下列兩種方式可作出其內接正方形如圖 (I)、(II) 所示。已知圖 (I) 的正方形面積為 900，則圖 (II) 的正方形面積為 _____。

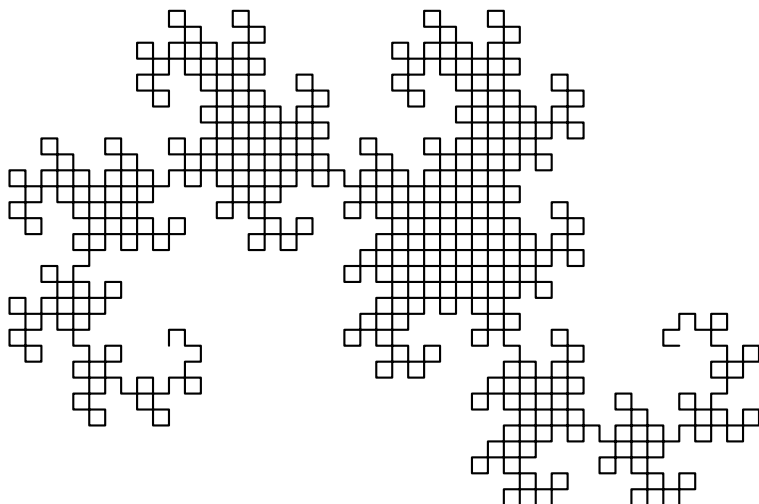


11. 不大於 48600 且與 48600 互質的自然數的個數有 _____ 個。

12. 龍曲線 (Dragon curve) 是由一條單位線段 (長度為 1) 開始, 按下面的規則畫成的圖形: 將前一代的每一條折線段都作為這一代的等腰直角三角形的斜邊, 依序畫出所有直角三角形的兩股, 使得所畫的相鄰兩線段永遠垂直 (即直角三角形在前一代曲線的左右兩邊交替出現), 所得的折線圖即為這一代的龍曲線。下圖由左到右分別為第一代、第二代、第三代、第四代曲線 (虛折線即為前一代曲線)。

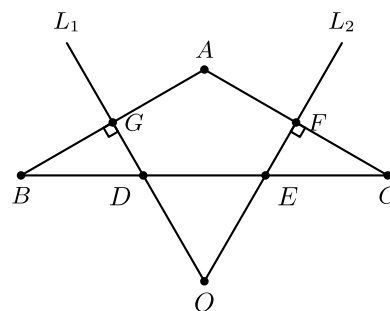


下圖為第十代的龍曲線, 則其長度為 _____。



13. 從 n 個連續正整數 $1, 2, 3, \dots, n$ 中任取相異三數為一組時, 共有 k 組組合, 令 x_1, x_2, \dots, x_k 分別為每組中最小的數以及所有 x 值的平均為 $\mu_x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}$ 。舉例: 當 $n = 4$ 時, 共有 4 組組合依序為 $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$, 則 $\mu_x = \frac{1+1+1+2}{4} = \frac{5}{4}$ 。試問當 $n = 10$ 時, $\mu_x =$ _____。

14. 如右圖, $\triangle ABC$ 中, $\overline{AB} = \overline{AC}$, \overline{AB} 與 \overline{AC} 的中垂線 L_1, L_2 相交於 O , 且與 $\triangle ABC$ 的三邊長分別交於 G, D, E, F 四點, 若 $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC} = 2\sqrt{3}$, 則四邊形 $AGOF$ 的外接圓面積為 _____ 平方單位。



15. 停車場內有 15 個停車位排成一行，現有 10 輛轎車抵達，並隨機挑選一個位置停車（只需一個停車位）。之後又有一台需要兩個停車位的休旅車進入停車場，試問此休旅車能夠完全停入的機率為 _____。

二、計算證明題：(共40分)

1. (10 分) 已知 $0 < a < 1$ ，實數 x, y 滿足 $x^2 + y = 0$ 。試證： $\log_a(a^x + a^y) \leq \log_a 2 + \frac{1}{8}$ 。

2. 在直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = c$ ， $\overline{BC} = a$ ， $\overline{CA} = b$ ，試証：
 - (1) (8 分) $c < a + b \leq \sqrt{2}c$
 - (2) (2 分) $a + b = \sqrt{2}c$ 之充要條件為 $a = b$

3. (10 分) 設 a, b, c 均為正數，且滿足 $a + b + c = 1$ 。試證： $\frac{1}{\sqrt{1-a}} + \frac{4}{\sqrt{1-b}} + \frac{9}{\sqrt{1-c}} \geq 6\sqrt{6}$ 。

4. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 2\angle ACB$ ，試証：
 - (1) (6 分) $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB} \cdot \overline{BC}$
 - (2) (4 分) $\overline{AB} + \overline{BC} < 2\overline{AC}$