

1. 計算第三題不等式中的 \geq 因等號必不成立，應改為 $>$

題目為 設 a, b, c 均為正數，且滿足 $a + b + c = 1$ 。試證： $\frac{1}{\sqrt{1-a}} + \frac{4}{\sqrt{1-b}} + \frac{9}{\sqrt{1-c}} \geq 6\sqrt{6}$ 。

回覆如下：

- (1) 從解法可知

$$\begin{aligned} (\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c})^2 &\leq (1^2 + 1^2 + 1^2) \left((\sqrt{1-a})^2 + (\sqrt{1-b})^2 + (\sqrt{1-c})^2 \right) \\ &= 3(3 - (a + b + c)) = 6 \end{aligned}$$

等號恰成立於 $a = b = c$ ；

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}} + \frac{4}{\sqrt{1-b}} + \frac{9}{\sqrt{1-c}} \right) (\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c}) \geq (1 + 2 + 3)^2 = 36 \\ \Rightarrow &\frac{1}{\sqrt{1-a}} + \frac{4}{\sqrt{1-b}} + \frac{9}{\sqrt{1-c}} \geq \frac{36}{\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c}} \geq \frac{36}{\sqrt{6}} = 6\sqrt{6} \end{aligned}$$

等號恰成立於 $1-a = \frac{1-b}{4} = \frac{1-c}{9}$ 。兩者條件若都要成立的話，必須 $a = b = c = 1$ ，這與 $a + b + c = 1$ 矛盾，故等號並不會成立。

- (2) 改為大於比較嚴謹，也比較完整考慮，但是 \geq 表示大於或等於，所以命題是正確的。就像 $5 \geq 3$ 、 $3 \geq 3$ 。
- (3) 若 \geq 的等號會有成立之時，題目僅有 $>$ 的話，那的確必須修正。不適用此疑義的情況。
- (4) 計算一也有類似的情況。算幾不等式 $a^x + a^y \geq 2a^{\frac{x+y}{2}}$ 等號恰成立於 $x = y$ ；而二次函數 $-(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$ 最大值產生在 $x = \frac{1}{2}$ ，則 $y = -x^2 = -\frac{1}{4}$ 。兩者無法同時成立，因此等號並不會成立！此題疑義應一併提出。
- (5) 若修改題目，原先已寫出該題，只是並未討論等號的同學就必須被扣分。沒有改題目的情況下，有寫出該題且又討論等號不成立，仍是得十分。
- (6) 綜合上述，本題仍維持原敘述且不予送分。

¹112 年 6 月 6 日繕打