國立彰化高級中學 114 學年度第一次教師甄選初試【數學科】試題卷

一、填充題 (每題 5 分，共 70 分：不用詳述計算過程，寫答即可，全對始計分)

1. 已知函數 $f(x)=(3-k)x^2+6x+k+4$，在 $x>0$ 時，其函數值恆正，則實數 k 的範圍為__________。

2. 已知$x,y\in R$且滿足$\begin{cases}x^3-3xy^2=5\\ y^3-3x^2y=1\end{cases}$，則$x^2+y^2$=__________。

3. 空間座標中，一正立方體的八個頂點分別為 $(0,0,0)$、$(1,0,0)$、$(0,1,0)$、$(0,0,1)$、$(1,1,0)$、$(1,0,1)$、$(0,1,1)$、$(1,1,1)$，已知三個平面 E_1：$2x+2y+2z=3$、E_2：$3x+y+3z=5$、E_3：$3x+3y+4z=6$ 與此正立方體的截痕分別為 a 邊形、b 邊形、c 邊形，求序對 $(a,b,c)=$__________。

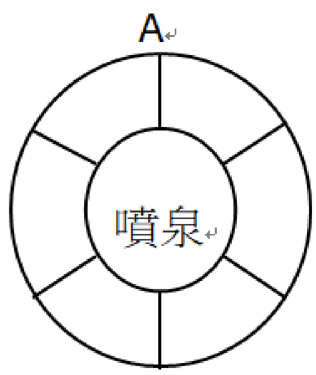
4. 已知空間中一直線 L：$\dfrac{x-1}{2}=y-2=\dfrac{z-3}{-2}$ 以及線外兩點 $A(5,2,-2)$、$B(1,-3,5)$。若 P 點為L上之動點，當 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值時的 P 點座標為__________。

5. 已知$[x]$表示不大於實數x的最大整數，解方程式 $(\log x)^2-[\log x]-6=0$ 得$x=$__________。

6. $a>0$，已知 x 的多項方程式 $f(x)=x^3+(-a^2+2a+2)x-2a^2-2a=0$ 有一實根二虛根，求 a 的範圍為__________。

7. $\triangle ABC$中，已知 M 為 $\overline{BC}$ 中點，$\overline{AB}$ 上一點 P 使 $\overline{AP}=4$，$\overline{BP}=3$，$\overline{AC}$ 上一點 Q 使 $\overline{AQ}=2$，$\overline{CQ}=1$，$\angle PMQ=90^\circ$，則 $\cos A=$__________。

8. 如圖所示，廣場中央有一座噴泉，某人從A點出發，沿噴泉周圍的小路不重複地繞噴泉走一周，最終回到A點的走法有________種。(噴泉會在你走的路線內部)



9. 已知函數$f(x)$在區間$[0,1]$中滿足$f(x)+f(1-x)=1$及 $f(\frac{x}{4})=\frac{1}{2}\cdot f(x)$，且當$0\le m<n\le 1$時，

$f(m)\le f(n)$；若$f(0)=0$，則 $f(\frac{1}{2025})=$__________。

10. 設有一拋物線$y=x^2-2x-5$，過$A(-1,0)$的一直線L與此拋物線所圍成的區域面積有最小值時，

求L的方程式為__________。

11. 在$\triangle ABC$中，已知$\angle B$的分角線$\overline{BE}$與$\overline{BC}$邊的中線$\overline{AD}$垂直且等長(E在$\overline{AC}$上)，已知$\overline{BE}=\overline{AD}=8$，

求$\triangle ABC$的周長=__________。

12. 計算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{4n^2-3k^2}}{2n^2}=$__________。

13. 設 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數，則$\sum\limits_{n=1}^{2025}\left[\frac{2025+2^n}{2^{n+1}}\right]=$__________。

14. 空間中兩點 $A(x_1,y_1,z_1)$ 、 $B(x_2,y_2,z_2)$ 之間的“絕對距離”定義如下：$d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|$。

已知$s>0$，定義以 A 點和 B 點為焦點的“絕對橢球”為點集合 $\{P\mid d(P,A)+d(P,B)=s\}$。

則經過點 $(1,0,0)$ 且焦點為 $(0,3,0)$ 與 $(0,0,4)$ 的絕對橢球之體積為__________。

二、計算證明題 (配分如各小題，共30分，要有計算或證明過程)

1. 設函數$f(x)=x+3+\sqrt{5-x^2}$，求$f(x)$的最大值及最小值。(7 分)

2. 已知實數 x、y、z 滿足：$(x+y+z)(x+y)(y+z)(z+x)\neq 0$ 且 $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=0$，試求：

(1) $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=$？(6 分)　　(2) $\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}=$？(6 分)

3. 設k為正整數，已知兩拋物線Γ_1：$y=x^2-k$ 與Γ_2：$x=-2(y-30)^2+k$ 有四個相異交點。

(1) 證明滿足題意的k值的最小值為6。(7分)

(2) 當$k=6$，此四個交點座標(x,y)皆會滿足$(x-a)^2+(y-b)^2\le r^2$，求r的最小值。(4分)