# 國立彰化高級中學 115 年數學學科能力競賽校內賽試題卷 (第一頁)

班級:　　　座號:　　　姓名:

一、選擇題(每題 4 分，共 24 分)

1.(　　) 平面上有三個點集 $M$，$N$，$P$：

$$M=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|<1\}$$

$$N=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}<2\sqrt{2}\right\}$$

$$P=\{(x,y)\,|\,|x+y|<1,\ |x|<1,\ |y|<1\}。$$

則：

(A) $M\subset P\subset N$　(B) $M\subset N\subset P$　(C) $P\subset N\subset M$

(D)(A)、(B)、(C)都不成立。

2.(　　) 已知三個平面 $\alpha,\beta,\gamma$，每兩個平面之間的夾角都是 $\theta$，且 $\alpha\cap\beta=a$，$\beta\cap\gamma=b$，$\gamma\cap\alpha=c$。若有

命題甲：$\theta>\frac{\pi}{3}$。　命題乙：$a$，$b$，$c$ 相交於一點。

則：(A)甲是乙的充分條件但不必要　(B)甲是乙的必要條件但不充分

(C)甲是乙的充分必要條件　(D)(A)、(B)、(C)都不對。

3.(　　) 在平面直角座標系中，縱橫座標均爲有理數的點稱爲有理點。若 $a$ 爲無理數，則過點 $(a,0)$ 的所有直線中，

(A)有無窮多條直線，其中每條直線上至少存在兩個有理點。

(B)恰有 $n(2\leq n<+\infty)$ 條直線，其中每條直線上至少存在兩個有理點。

(C)有且僅有一條直線至少通過兩個有理點。

(D)每條直線至多通過一個有理點。

4.(　　) 平面上有一個點集 $M$ 和七個不同的圓 $C_1$，$C_2$，…，$C_7$，其中圓 $C_7$ 恰好經過 $M$ 中的 7 個點，圓 $C_6$ 恰好經過 $M$ 中的 6 個點，…，圓 $C_1$ 恰好經過 $M$ 中的 1 個點，那麼 $M$ 中的點數最少爲：

(A) 11　(B) 12　(C) 21　(D) 28

5.(　　) 邊長爲 $a$，$b$，$c$ 的三角形，其面積等於 $\frac{1}{4}$，而外接圓半徑爲 1，若

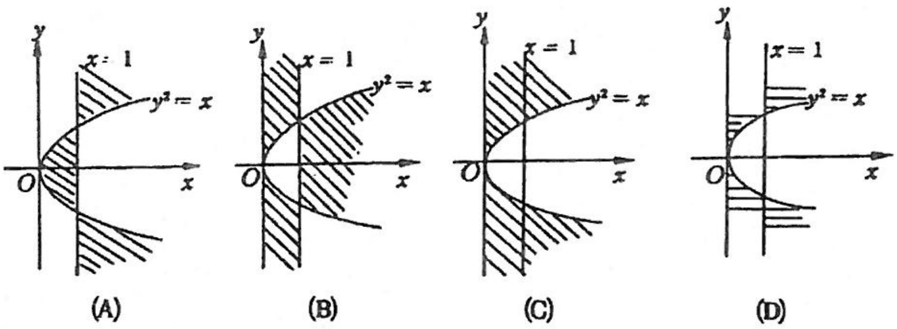
$$s=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

$$t=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

則 $s$ 與 $t$ 的大小關係是

(A) $s>t$　(B) $s=t$　(C) $s<t$　(D)不確定

6.(　　)下列四個圖的陰影部分（不包括邊界）滿足不等式 $\log_x(\log_x y^2)>0$ 的是？




二、填充題(每格 6 分，共 54 分)

(A) 邊長爲 5 的菱形，它的一條對角線的長不大於 6，另一條不小於 6，則這個菱形兩條對角線長度之和的最大值是 ________。

(B) 設實數 $a$，$b$，$c$ 滿足

$$\begin{cases} a^2-bc-8a+7=0 \\ b^2+c^2+bc-6a+6=0 \end{cases}$$

那麼 $a$ 的取值範圍是 ________。

(C) 在$\triangle ABC$中，角$A$、$B$、$C$的對邊分別爲$a$，$b$，$c$。若角$A$，$B$，$C$的大小成等比數列，且 $b^2-a^2=ac$，則角$B$的弧度等於 ________。

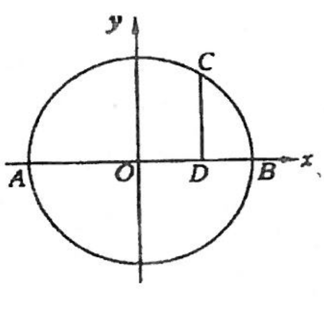
(D) 在已知數列 1，4，8，10，16，19，21，25，30，43 中，相鄰若干數之和能被11整除的數組，共有________組。

(E) 對任意實數 $x$，$y$，定義運算 $x*y$ 爲：

$$x*y=ax+by+cxy$$

其中 $a$、$b$、$c$ 爲常數，等式右端運算是通常的實數的加法和乘法。現已知 $1*2=3$，$2*3=4$，並且有一個非零實數 $d$，使得對於任意實數 $x$，都有 $x*d=x$，則 $d=$ ________。

(F) 如圖，$AB$ 是單位圓的直徑，在 $AB$ 上任取一點 $D$，作 $DC\perp AB$，交圓周於 $C$，若點 $D$ 座標爲 $(x,0)$，則當 $x\in($　,　$)$ 時，線段 $AD$、$BD$、$CD$ 可構成銳角三角形。



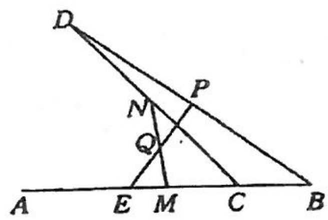
(G) 一個六面體的各個面和一個正八面體的各個面都是邊長爲 $a$ 的正三角形，這樣兩個多面體的內切球的半徑之比爲 ________。

(H) 方程：$\cos\frac{x}{4}=\cos x$，在 $(0,24\pi)$ 內，不相同的解有 ______ 個。

(I) 把半徑爲 1 的四個小球疊成兩層放在桌面上；下層三個，上層一個，兩兩相切，求上層小球最高點離桌面的高度＝ ________。

三、計算證明題(二大題共 22 分，要有詳細過程)

1. 如圖，設線段 $AB$ 的中點爲 $M$，從 $AB$ 上另一 $C$ 點向直線 $AB$ 的一側引線段 $CD$；令 $CD$ 的中點爲 $N$，$BD$ 的中點爲 $P$，$MN$ 的中點爲 $Q$，求證：直線 $PQ$ 平分線段 $AC$。 (11分)




2. 在圓 $O$ 內，弦 $CD$ 平行於弦 $EF$，且與直徑 $AB$ 交成 $45^\circ$ 角，若 $CD$ 與 $EF$ 分別交直徑 $AB$ 於 $P$ 和 $Q$，且圓 $O$ 的半徑長爲 1。

求證：

$PC\cdot QE+PD\cdot QF<2$。 (11分)

# 國立彰化高級中學 115 年數學學科能力競賽校內賽解答

班級:　　　座號:　　姓名:

一、選擇題(每題 4 分，共 24 分)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| (A) | (C) | (C) | (B) | (C) | (D) |

二、填充題(每格 6 分，共 54 分)

| | | |
|---|---|---|
| (A) 14 | (B) [1,9] | (C) $\frac{2\pi}{7}$ |
| (D) 7 | (E) 4 | (F) $(2-\sqrt{5},\sqrt{5}-2)$ |
| (G) 2：3 | (H) 20 | (I) $2+\frac{2}{3}\sqrt{6}$ |