數學乙

北北基高級中等學校

114 學年度分科測驗聯合模擬考試

數學乙考科參考答案暨詳解

翰林出版事業股份有限公司

99362718-34

數學乙考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(4)	(2)	(3)	(2)	(2)	(3)	(1)(2)(3)(5)
8.	9.					
(1)(2)(3)(5)	(1)(2)(4)					

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：集合的取捨原理之應用

解析：設 U 為全年級學生的集合，A 為參加合唱團學生的集合，B 為參加科技社學生的集合

$n(U)=100$，$n(A)=63$，$n(B)=75$

根據取捨原理，$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\Rightarrow n(A\cap B)=63+75-n(A\cup B)$

$\because A\cup B\subseteq U$

$\therefore n(A\cup B)\leq n(U)=100\Rightarrow n(A\cup B)\overset{\text{最大值}}{=}100$

$\Rightarrow n(A\cap B)\overset{\text{最小值}}{=}63+75-100=38$

故選(4)。

2. (2)

出處：選修數學乙(下)〈複數與多項式方程式〉

目標：複數平面上絕對值的幾何意義

解析：$|z-3i|=2$ 在複數平面上表示以 $C(0,3)$ 為圓心，半徑 $r=2$ 的圓

$|z|=|z-0|$，其幾何意義為圓上的點 z 到定點 $P(0,0)$ 的距離

$|z|\overset{\text{最大值}}{=}\overline{CP}+r=3+2=5$

故選(2)。

3. (3)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：正弦定理在圓中的幾何應用

解析：在直角△ABC 中，$\angle B=90^\circ$，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=12$

由畢氏定理可知 $\overline{AC}=13$，

且 $\sin C=\dfrac{5}{13}$

觀察△CQR，由正弦定理，$\dfrac{\overline{QR}}{\sin C}=8$

$\Rightarrow \overline{QR}=8\times\sin C$

$=8\times\dfrac{5}{13}=\dfrac{40}{13}$

故選(3)。

4. (2)

出處：第一冊〈指數、對數〉、

第三冊 A〈指數與對數函數〉、

第三冊 B〈按比例成長模型〉

目標：對數的運算性質與不等式求解能力

解析：等比數列 $a_n=a_1\times r^{n-1}=10\times 2^{n-1}$

$\Rightarrow b_n=\log a_n=\log(10\times 2^{n-1})=\log 10+\log 2^{n-1}$

$=1+(n-1)\log 2\approx 1+(n-1)\times 0.3010$

則 $b_n>6\Rightarrow 1+(n-1)\times 0.3010>6$

$\Rightarrow n-1>\dfrac{5}{0.3010}\approx 16.6$

$\Rightarrow n>17.6$

$\Rightarrow n\overset{\text{最小值}}{=}18$

故選(2)。

5. (2)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：相關係數的性質、最適 (迴歸) 直線斜率公式以及數據標準化的意義

解析：已知相關係數 $r=0.6$，

且 y 對 x 的最適直線之斜率為 $m=0.3$

(1) ╳：由 $m=r\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\Rightarrow 0.3=0.6\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\Rightarrow\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \sigma_x=2\sigma_y$

$\because \sigma_x$，$\sigma_y\geq 0$

$\therefore \sigma_x>\sigma_y$

(2) ○：數據標準化後，平均數皆為 0，標準差皆為 1

標準化後的最適直線方程式恆過原點，且其斜率即為相關係數 r，故斜率為 0.6

(3) ╳：相關係數 $r=0.6$ 代表兩變量間的線性相關程度，並非指有 60 %的點落在最適直線上

即使所有點都不在最適直線上，相關係數仍可能為 0.6

(4) ╳：將數據 x 與 y 互換，兩變量間相關程度不變，故相關係數仍為 0.6

(5) ╳：假設將數據 x 與 y 互換後最適直線斜率為 m'

$m'=r\times\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$，由(1)知 $\sigma_x=2\sigma_y$，即 $\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}=2$

故 $m'=0.6\times 2=1.2$

故選(2)。

6. (3)

出處：第二冊〈數據分析〉、第二冊〈排列組合與機率〉

目標：數據標準差與變異數的定義及計算、古典機率的計算

解析：投擲一顆公正骰子兩次，樣本空間總數為 $6\times 6=36$

投擲兩次的點數分別為 a 與 b，算術平均數 $\mu=\dfrac{a+b}{2}$

變異數 $\sigma^2=\dfrac{(a-\mu)^2+(b-\mu)^2}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\left[\left(a-\dfrac{a+b}{2}\right)^2+\left(b-\dfrac{a+b}{2}\right)^2\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2\right]=\dfrac{(a-b)^2}{4}$

$\sigma^2<1\Rightarrow\dfrac{(a-b)^2}{4}<1\Rightarrow(a-b)^2<4$

$\because a$，b 為整數，$(a-b)^2=0$ 或 1

若 $(a-b)^2=0$，則 $(a,b)=(1,1)$，$(2,2)$，$(3,3)$，$(4,4)$，$(5,5)$，$(6,6)$，共 6 種

若 $(a-b)^2=1$，則 $(a,b)=(1,2)$，$(2,1)$，$(2,3)$，$(3,2)$，……，$(5,6)$，$(6,5)$，共 10 種

所求機率為 $\dfrac{6+10}{36}=\dfrac{4}{9}$

故選(3)。

二、多選題

7. (1)(2)(3)(5)

出處：第三冊 A〈平面向量〉、第三冊 B〈平面向量與應用〉

目標：平面向量的內積定義、長度公式、面積以及正射影 (向量與長度) 的概念

解析：已知 $|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=3$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=3$

(1) ○：設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ，

則 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\dfrac{3}{2\times3}=\dfrac{1}{2}$

因 $0^\circ\leq\theta\leq180^\circ$，故 $\theta=60^\circ$

(2) ○：$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$

$=2^2-2\times3+3^2$

$=4-6+9$

$=7$

$\Rightarrow|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=\pm\sqrt{7}$ (負不合)

$\therefore|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=\sqrt{7}$

(3) ○：以 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 所張成的平行四邊形面積

$=2(\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 所張成的三角形面積)

$=2\times\left(\dfrac{1}{2}\times|\overrightarrow{a}|\times|\overrightarrow{b}|\times\sin60^\circ\right)$

$=2\times\left(\dfrac{1}{2}\times2\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\sqrt{3}$

(4) ╳：$\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影為

$\left(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}\right)\overrightarrow{b}=\dfrac{3}{9}\overrightarrow{b}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{b}$

$\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影為

$\left(\dfrac{\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|^2}\right)\overrightarrow{a}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{a}$

由於 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 方向不同，故兩者不相同

(5) ○：承(4)，$\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影為 $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{b}$

故正射影長為 $\left|\dfrac{1}{3}\overrightarrow{b}\right|=\dfrac{1}{3}\times3=1$

故選(1)(2)(3)(5)。

8. (1)(2)(3)(5)

出處：第四冊 A〈矩陣〉、第四冊 B〈矩陣與資料表格〉

目標：矩陣的加法、乘法及矩陣運算的線性性質

解析：(1) ○：A、B 同為 3×2 階矩陣，

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}，B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}\\a_{31}+b_{31}&a_{32}+b_{32}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}b_{11}+a_{11}&b_{12}+a_{12}\\b_{21}+a_{21}&b_{22}+a_{22}\\b_{31}+a_{31}&b_{32}+a_{32}\end{bmatrix}=B+A$$

(2) ○：$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow BA=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+b_{13}a_{31}&b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}+b_{13}a_{32}\\b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21}+b_{23}a_{31}&b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}+b_{23}a_{32}\end{bmatrix}$$

為二階方陣

(3) ○：$AI_2=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}=A$

$I_3A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}=A$

(4) ╳：若 $A=\begin{bmatrix}2&4\\1&3\\7&3\end{bmatrix}$，$2A=\begin{bmatrix}4&8\\2&6\\14&6\end{bmatrix}$

(5) ○：由 $A\begin{bmatrix}3&a\\0&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&5\\6&0\\9&5\end{bmatrix}$，可知 $A\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}=2\times A\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}=2\times\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\12\\18\end{bmatrix}$

由 $A\begin{bmatrix}c&0\\d&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&4\\5&-2\\5&2\end{bmatrix}$，可知 $A\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-2\\2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A\begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix}=3\times A\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}=3\times\begin{bmatrix}4\\-2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\-6\\6\end{bmatrix}$

故 $A\begin{bmatrix}0&6\\6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12&6\\-6&12\\6&18\end{bmatrix}$，故選(1)(2)(3)(5)。

9. (1)(2)(4)

出處：第二冊〈數列與級數〉、
第三冊 A〈指數與對數函數〉、
第三冊 B〈按比例成長模型〉

目標：遞迴數列的列式、項數計算與指數模型

解析：(1) ○：a_n 為第 n 天服用藥後體內累積的總藥物量，

$a_1=50$

第 $n+1$ 天服用藥後的總量為

「第 n 天殘留的量」+「第 $n+1$ 天新服用的量」

已知經過一天後殘留量變為原來的 60 % (即 0.6 倍)，且每次新服用 40 毫克

故 $a_{n+1}=a_n\times60\,\%+40=0.6a_n+40$，對於所有 n 為正整數

(2) ○：$a_1=50$，

$a_2=0.6\times a_1+40=0.6\times50+40=70$

$\Rightarrow a_3=0.6\times a_2+40=0.6\times70+40=82$

(3) ╳：$a_2-a_1=70-50=20$，$a_3-a_2=82-70=12$，
故此數列並非等差數列

(4) ○：由 $a_{n+1}=0.6a_n+40$

$\Rightarrow a_{n+1}-100=0.6a_n+40-100$

$\Rightarrow a_{n+1}-100=0.6a_n-60=0.6(a_n-100)$

表示數列〈a_n-100〉是一個首項為 $a_1-100=50-100=-50$，公比為 0.6 的等比數列，

其一般式為 $a_n-100=(-50)\times(0.6)^{n-1}$，對於所有 n 為正整數

$a_n=100+(-50)\times(0.6)^{n-1}$，對於所有 n 為正整數

$a_{n+1}-a_n=(-50)\times〔(0.6)^n-(0.6)^{n-1}〕$，對於所有 n 為正整數

又 $(0.6)^n<(0.6)^{n-1}$，對於所有 n 為正整數

$\Rightarrow a_{n+1}-a_n>0\Rightarrow a_{n+1}>a_n$，即此數列為遞增數列

(5) ╳：$a_n=100-50\times(0.6)^{n-1}<100$

故長期服用後，體內藥物總量不會超過 150 毫克

故選(1)(2)(4)。

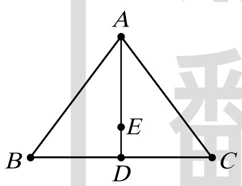
三、選填題

10. 7

出處：第四冊 A〈空間向量〉、第四冊 B〈空間概念與空間坐標系〉

目標：運用空間坐標計算兩點間距離

解析：如下圖，因 D 為 $\overline{BC}$ 中點，故 $\overline{BD}=\overline{CD}=6$



又△ABC 為等腰三角形，故 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$

$\Rightarrow\overline{AD}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

$\because\overline{AE}:\overline{ED}=3:1\Rightarrow\overline{ED}=8\times\dfrac{1}{3+1}=2$

假設 $D(0,0,0)$，$C(6,0,0)$，$E(0,2,0)$

不失一般性，$P(0,2,3)$

故 $\overline{PC}=\sqrt{(6-0)^2+(0-2)^2+(0-3)^2}$

$=\sqrt{36+4+9}=7$。

11. -16

出處：選修數學乙(下)〈線性規劃〉

目標：直線方程式求法、垂直條件及線性規劃求目標函數最小值

解析：L_1 的 y 截距為 3 $\Rightarrow L_1$ 通過 $(0,3)$，又 $(2,6)$ 也在 L_1 上

$\Rightarrow L_1$ 的斜率 $m_1=\dfrac{6-3}{2-0}=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow L_1：3x-2y=-6$

$\because L_1\perp L_2\quad\therefore L_2$ 的斜率 $m_2=-\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow L_2：2x+3y=22$

令 L_1、L_2 交點 $A(2,6)$；L_1 與 x 軸交點為 $B(-2,0)$；L_2 與 x 軸交點為 $C(11,0)$

R 即為△ABC 的內部 (含邊界)

設目標函數 $f(x,y)=8x-5y$，各頂點逐一代入：

$f(2,6)=16-30=-14$；

$f(-2,0)=-16-0=-16$；

$f(11,0)=88-0=88$

故 $8x-5y$ 的最小值為 -16。

12. $x+4y+6=0$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：三角形重心坐標、直線方程式

解析：$\begin{cases}x-2y=2\\x+y=2\end{cases}\Rightarrow$ 兩中線之交點為重心 $G(2,0)$

假設 $\overline{BC}$ 之中點 D

由重心性質可知，$\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$，

$A(2,4)$、$G(2,0)$，故 $D(2,-2)$

又 $A(2,4)$ 不在已知的兩條中線上

故不失一般性，假設直線 $x+y-2=0$ 為通過 B 點之中線，

假設 $B(t,2-t)$，t 為任意實數

因 $D(2,-2)$ 為 $\overline{BC}$ 之中點，故 $C(4-t,-6+t)$，

將 C 點代入直線 $x-2y-2=0$

$\Rightarrow(4-t)-2(-6+t)-2=0\Rightarrow-3t+14=0$

$\Rightarrow t=\dfrac{14}{3}\Rightarrow B\left(\dfrac{14}{3},-\dfrac{8}{3}\right)$

直線 BC 之斜率為 $\dfrac{-2-\left(-\dfrac{8}{3}\right)}{2-\dfrac{14}{3}}=\dfrac{2}{-8}=-\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow\overleftrightarrow{BC}：x+4y\overset{D\text{代入}}{=}2-8=-6\Rightarrow x+4y+6=0$

故直線 BC 的方程式為 $x+4y+6=0$。

第貳部分、混合題或非選擇題

13. (5)

出處：選修數學乙(上)〈微分〉

目標：函數的遞增遞減、切線斜率及尋找兩曲線交點

解析：已知需求函數 $D(x)=(x-2)^2=x^2-4x+4$，

供給函數是 $S(x)=\dfrac{x^2+1}{2}$

(1) ╳：$S(x)=\dfrac{x^2+1}{2}$ 的二次項係數為正

故 $y=S(x)$ 是一個開口向上的二次函數

(2) ╳：$D'(x)=2x-4$

在 $0\le x\le 2$ 範圍內，$2x-4\le 0\Rightarrow D'(x)\le 0$

故 $y=D(x)$ 在 $0\le x\le 2$ 範圍內遞減

(3) ╳：$D'(1)=2-4=-2$

且 $S'(x)=x\Rightarrow S'(1)=1$

得 $S'(1)>D'(1)$

即供給曲線的切線斜率大於需求曲線的切線斜率

(4) ╳：$D(x)=S(x)\Rightarrow(x-2)^2=\dfrac{x^2+1}{2}$

$\Rightarrow 2(x^2-4x+4)=x^2+1$

$\Rightarrow x^2-8x+7=0$

$\Rightarrow(x-1)(x-7)=0$

$\Rightarrow x=1$ 或 7 $(7>2$，不合$)$

故均衡數量為 $x=1$ (千個)，

均衡價格為 $D(1)=S(1)=1$ (千元)

(5) ○：承(3)，$D'(1)=-2$

故選(5)。

14. 消費者剩餘為 $\frac{4}{3}$ 百萬元，生產者剩餘為 $\frac{1}{3}$ 百萬元

出處：選修數學乙(上)〈積分〉

目標：計算生產者剩餘跟消費者剩餘的方法

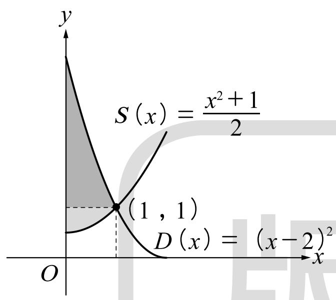
解析：承 13. 題，已知均衡點為 (1 , 1)

消費者剩餘：

$\int_0^1 (x-2)^2\,dx-1\times1$

$=\int_0^1 (x^2-4x+4)\,dx-1=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right)\Big|_0^1-1$

$=\left(\frac{1}{3}-2+4\right)-(0-0+0)-1=\frac{4}{3}$



生產者剩餘：

$1\times1-\int_0^1\left(\frac{x^2+1}{2}\right)dx$

$=1-\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)dx=1-\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x\right)\Big|_0^1$

$=1-\left[\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)-(0+0)\right]=\frac{1}{3}$

故消費者剩餘為 $\frac{4}{3}$ 百萬元，生產者剩餘為 $\frac{1}{3}$ 百萬元。

◎評分原則

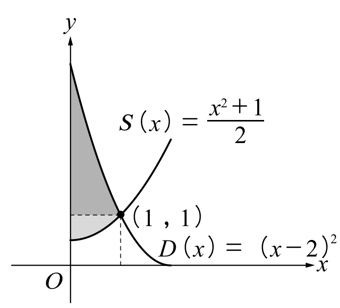
承 13. 題，已知均衡點為 (1 , 1)

消費者剩餘：

$\int_0^1 (x-2)^2\,dx-1\times1$ (1 分)

$=\int_0^1 (x^2-4x+4)\,dx-1=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right)\Big|_0^1-1$ (2 分)

$=\left(\frac{1}{3}-2+4\right)-(0-0+0)-1=\frac{4}{3}$ (1 分)



生產者剩餘：

$1\times1-\int_0^1\left(\frac{x^2+1}{2}\right)dx$ (1 分)

$=1-\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)dx=1-\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x\right)\Big|_0^1$ (2 分)

$=1-\left[\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)-(0+0)\right]=\frac{1}{3}$ (1 分)

故消費者剩餘為 $\frac{4}{3}$ 百萬元，生產者剩餘為 $\frac{1}{3}$ 百萬元。

15. 0.5 千個

出處：選修數學乙(上)〈微分〉

目標：利用導函數求函數極大值

解析：$P(x)=x\cdot D(x)-0.75x+2=x\cdot(x^2-4x+4)-0.75x+2$

$=x^3-4x^2+3.25x+2$，定義域為 $0\le x\le 2$

$\Rightarrow P'(x)=3x^2-8x+3.25$

$=\frac{1}{4}(12x^2-32x+13)=\frac{1}{4}(2x-1)(6x-13)$

令 $P'(x)=0$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{13}{6}$ $\left(\frac{13}{6}>2\text{，不合}\right)$

當 $x=\frac{1}{2}=0.5$ 時，

$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot D\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+2$

$=\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}+\frac{13}{8}=\frac{11}{4}=2.75$ (千元)

$P'(x)=\frac{1}{4}(2x-1)(6x-13)>0\Rightarrow x>\frac{13}{6}$ (不合) 或 $x<\frac{1}{2}$

故 $0\le x\le\frac{1}{2}$ 範圍內，$P(x)$ 遞增

$P'(x)=\frac{1}{4}(2x-1)(6x-13)<0\Rightarrow\frac{1}{2}<x<\frac{13}{6}$

故 $\frac{1}{2}\le x\le 2$ 範圍內，$P(x)$ 遞減

因此在 $x=\frac{1}{2}$ 時，$P\left(\frac{1}{2}\right)$ 是 $P(x)$ 在 $0\le x\le 2$ 內的相對極大值

又 $P(0)=0\cdot D(0)-0.75\times0+2=0-0+2=2<2.75$

$P(2)=2\cdot D(2)-0.75\times2+2=0-1.5+2=0.5<2.75$

故在 $x=0.5$ 時，$P(0.5)$ 是 $P(x)$ 在 $0\le x\le 2$ 內的最大值

因此當銷售量 $x=0.5$ (千個) 時，淨收入有最大值。

◎評分原則

$P(x)=x\cdot D(x)-0.75x+2=x\cdot(x^2-4x+4)-0.75x+2$

$=x^3-4x^2+3.25x+2$，定義域為 $0\le x\le 2$

$\Rightarrow P'(x)=3x^2-8x+3.25$ (1 分)

$=\frac{1}{4}(12x^2-32x+13)=\frac{1}{4}(2x-1)(6x-13)$

令 $P'(x)=0$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{13}{6}$ $\left(\frac{13}{6}>2\text{，不合}\right)$ (1 分)

當 $x=\frac{1}{2}=0.5$ 時，

$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot D\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+2$

$=\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}+\frac{13}{8}=\frac{11}{4}=2.75$ (千元)

$P'(x)=\frac{1}{4}(2x-1)(6x-13)>0 \Rightarrow x>\frac{13}{6}$ (不合) 或 $x<\frac{1}{2}$

故 $0\leq x\leq\frac{1}{2}$ 範圍內，$P(x)$ 遞增

$P'(x)=\frac{1}{4}(2x-1)(6x-13)<0 \Rightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{13}{6}$

故 $\frac{1}{2}\leq x\leq 2$ 範圍內，$P(x)$ 遞減

因此在 $x=\frac{1}{2}$ 時，$P\left(\frac{1}{2}\right)$ 是 $P(x)$ 在 $0\leq x\leq 2$ 內的相對極大值

又 $P(0)=0\cdot D(0)-0.75\times 0+2=0-0+2=2<2.75$

$P(2)=2\cdot D(2)-0.75\times 2+2=0-1.5+2=0.5<2.75$

故在 $x=0.5$ 時，$P(0.5)$ 是 $P(x)$ 在 $0\leq x\leq 2$ 內的最大值

因此當銷售量 $x=0.5$ (千個) 時，淨收入有最大值。 (2 分)

16. $\frac{8}{9}$ 元

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：期望值的定義與計算，分析中獎機率

解析：袋中有 1～9 號球，抽出兩球的樣本空間總數為

$C_2^9=\frac{9\times 8}{2}=36$

中獎條件為兩球皆為偶數且位於同一行或同一列，因此得獎金的所有可能為：

$2+4=6$ (元) 或 $6+8=14$ (元) 或 $4+8=12$ (元)

其餘 33 種情形獎金為 0 元

故所求獎金的期望值為

$6\times\frac{1}{36}+14\times\frac{1}{36}+12\times\frac{1}{36}+0\times\frac{33}{36}$

$=\frac{6+14+12}{36}=\frac{32}{36}=\frac{8}{9}$ (元)。

◎評分原則

袋中有 1～9 號球，抽出兩球的樣本空間總數為

$C_2^9=\frac{9\times 8}{2}=36$

中獎條件為兩球皆為偶數且位於同一行或同一列，因此得獎金的所有可能為：

$2+4=6$ (元) 或 $6+8=14$ (元) 或 $4+8=12$ (元)　(2 分)

其餘 33 種情形獎金為 0 元

故所求獎金的期望值為

$6\times\frac{1}{36}+14\times\frac{1}{36}+12\times\frac{1}{36}+0\times\frac{33}{36}$

$=\frac{6+14+12}{36}=\frac{32}{36}=\frac{8}{9}$ (元)。　(2 分)

17. (4)

出處：選修數學乙(下)〈機率統計〉

目標：重複試驗 (二項分布) 的機率計算與組合討論

解析：甲生玩 50 次，總獎金恰為 12 元，有以下兩種情形：

第一種情形：中一次 12 元，49 次 0 元，

機率為 $C_1^{50}\times\frac{1}{36}\times\left(\frac{33}{36}\right)^{49}$

第二種情形：中兩次 6 元，48 次 0 元，

機率為 $C_2^{50}\times\left(\frac{1}{36}\right)^2\times\left(\frac{33}{36}\right)^{48}$

由於上述兩種情形彼此互斥，故所求機率為

$C_1^{50}\times\frac{1}{36}\times\left(\frac{33}{36}\right)^{49}+C_2^{50}\times\left(\frac{1}{36}\right)^2\times\left(\frac{33}{36}\right)^{48}$

$=50\times\frac{1}{36}\times\frac{33}{36}\times\left(\frac{33}{36}\right)^{48}+1225\times\left(\frac{1}{36}\right)^2\times\left(\frac{33}{36}\right)^{48}$

$=\left(\frac{33}{36}\right)^{48}\times\left(50\times\frac{1}{36}\times\frac{33}{36}+1225\times\left(\frac{1}{36}\right)^2\right)$

$=\left(\frac{33}{36}\right)^{48}\times\frac{1650+1225}{36^2}=\frac{2875}{36^2}\times\left(\frac{33}{36}\right)^{48}$

故選(4)。

18. 否，說明略

出處：選修數學乙(下)〈機率統計〉

目標：假設檢定的操作流程

解析：令隨機變數 $X=$「50 次遊戲中的中獎次數」

若遊戲是公正的，則每次中獎機率為 $p=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$，

不中獎機率為 $q=1-p=\frac{33}{36}=\frac{11}{12}$

故 $X\sim B\left(50,\frac{1}{12}\right)$

$P(X=0)=\left(\frac{11}{12}\right)^{50}\approx 0.013$

$P(X=1)=C_1^{50}\times\frac{1}{12}\times\left(\frac{11}{12}\right)^{49}\approx\frac{50}{12}\times 0.014\approx 0.058$

$P(X=2)=C_2^{50}\times\left(\frac{1}{12}\right)^2\times\left(\frac{11}{12}\right)^{48}\approx\frac{1225}{144}\times 0.015\approx 0.128$

$\Rightarrow P(X\leq 2)\approx 0.013+0.058+0.128=0.199>0.05$

表示「50 次遊戲中的中獎次數不超過兩次」不足以在顯著水準 0.05 下拒絕遊戲是公正的假設。

◎評分原則

令隨機變數 $X=$「50 次遊戲中的中獎次數」

若遊戲是公正的，則每次中獎機率為 $p=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$，不中獎機率為 $q=1-p=\frac{33}{36}=\frac{11}{12}$

故 $X\sim B\left(50,\frac{1}{12}\right)$　(1分，能表達中獎機率為 $\frac{1}{12}$ 或不中獎機率為 $\frac{11}{12}$，即可得 1 分)

$P(X=0)=\left(\frac{11}{12}\right)^{50}\approx 0.013$

$P(X=1)=C_1^{50}\times\frac{1}{12}\times\left(\frac{11}{12}\right)^{49}\approx\frac{50}{12}\times 0.014\approx 0.058$

$P(X=2)=C_2^{50}\times\left(\frac{1}{12}\right)^2\times\left(\frac{11}{12}\right)^{48}\approx\frac{1225}{144}\times 0.015\approx 0.128$

$\Rightarrow P(X\leq 2)\approx 0.013+0.058+0.128=0.199>0.05$　(2 分)

表示「50 次遊戲中的中獎次數不超過兩次」不足以在顯著水準 0.05 下拒絕遊戲是公正的假設。(1 分)