北北基高級中等學校

114 學年度分科測驗聯合模擬考試

數學甲考科參考答案暨詳解

翰林出版事業股份有限公司

99362717-34

114-E7

數學甲考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(3)	(5)	(4)	(1)(4)	(1)(4)	(1)(5)	(1)(3)(4)(5)
8.						
(2)(3)(4)						

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (3)

出處：第一冊〈指數、對數〉、第三冊〈指數與對數函數〉

目標：指數與對數的運算

解析：$\begin{cases} r(1)=a+b\log_2 1=1 \text{ ……①} \\ r(4)=a+b\log_2 4=1.2 \text{ ……②} \end{cases}$

由①得 $a=1$ 代入②

可得 $1+b\log_2 4=1.2 \Rightarrow 1+2b=1.2 \Rightarrow b=0.1$

設 A、B 螢幕每平方公分的雜訊點個數分別為 n_A、n_B

$\begin{cases} 17.4=1+0.1\log_2 n_A \text{ ……③} \\ 15.2=1+0.1\log_2 n_B \text{ ……④} \end{cases}$

由③－④得 $2.2=0.1\log_2\dfrac{n_A}{n_B} \Rightarrow 22=\log_2\dfrac{n_A}{n_B}$

$\Rightarrow \dfrac{n_A}{n_B}=2^{22}$

故選(3)。

2. (5)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：平面向量的線性組合、行列式代表的面積意義

解析：$\overrightarrow{AB}=(7\,,14)$

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{7}\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{7}(7\,,14)+\dfrac{2}{7}(7\,,-14)$

$=3(1\,,2)+2(1\,,-2)=(5\,,2)$

故△ABP 面積為 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 14 & 2 \end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}\times 7\left|\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right|$

$=\dfrac{7}{2}\times 8=28$ (平方單位)

故選(5)。

3. (4)

出處：選修數學甲(上)〈積分〉

目標：了解黎曼和與定積分的關係

解析：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4\times(4-6n)^3+4\times(8-6n)^3+\cdots\cdots+4\times[4(n-1)-6n]^3}{n^4}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4}{n}\left[\left(\frac{4}{n}-6\right)^3+\left(\frac{8}{n}-6\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{4(n-1)}{n}-6\right)^3\right]\right\}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4}{n}\left[\left(\frac{4}{n}-6\right)^3+\left(\frac{8}{n}-6\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{4(n-1)}{n}-6\right)^3+\left(\frac{4n}{n}-6\right)^3-\left(\frac{4n}{n}-6\right)^3\right]\right\}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4}{n}\left[\left(\frac{4}{n}-6\right)^3+\left(\frac{8}{n}-6\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{4(n-1)}{n}-6\right)^3+\left(\frac{4n}{n}-6\right)^3\right]-\frac{4}{n}(-2)^3\right\}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i}{n}-6\right)^3+\frac{32}{n}\right]$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i}{n}-6\right)^3\right]+\lim_{n\to\infty}\frac{32}{n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i}{n}-6\right)^3\right]$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i}{n}-6\right)^3\right]$ 可視為 $f(x)=(x-6)^3$ 在 $x=0$ 到

$x=4$ 時，黎曼和的極限，也就是定積分 $\displaystyle\int_0^4(x-6)^3\,dx$

故選(4)。

二、多選題

4. (1)(4)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：了解絕對值不等式的意義

解析：由 $|x-a|\le b$ 可知

$a-b\le x\le a+b$

(1)○：$1\le a\le 5$，$2\le b\le 6$

取 $a=3$，$b=3$ 時，滿足所有條件

故 a，b 可能相等

(2)╳：$a+b$ 的最小值發生在 $a=1$，$b=2$ 時

此時最小值為 $1+2=3$

故 $a+b$ 恆滿足 $a+b\ge 3$

$\therefore a+b$ 不可能等於 2

(3)╳：x 的最小值為 $a-b$，

發生在 $a=1$，$b=6$ 時

即 x 的最小值為 $1-6=-5$

故 x 值恆滿足 $x\ge -5$，x 不可能等於 -7

(4)○：承(3)，x 可能的值必滿足 $x\ge -5$

(5)╳：欲使 $x=4$ 滿足 $|x-b|\le a$，

必須 $|4-b|\le a$

$\Rightarrow b-a\le 4\le a+b$

$b-a$ 的最大值發生在 $b=6$，$a=1$

此時最大值為 5，而 $5>4$

故 $b-a\le 4$ 不恆成立

反例：$a=1$，$b=6$ 時，$|4-6|=2$ 不小於 $a=1$

故 $x=4$ 不一定滿足不等式 $|x-b|\le a$

故選(1)(4)。

5. (1)(4)

出處：選修數學甲(上)〈微分〉、

選修數學甲(下)〈複數與多項式方程式〉

目標：多項式方程式與微分的應用

解析：(1)○：$\because f(x)$ 是實係數多項式，由虛根成對定理可知

當 $2+i$ 是方程式 $f(x)=0$ 的一虛根，

則 $2-i$ 也是 $f(x)=0$ 的一虛根

$\therefore f(x)=x^4-2x^3-5x^2+ax+b$

$=(x-(2+i))(x-(2-i))(x^2+px+q)$

$=(x^2-4x+5)(x^2+px+q)$

$=x^4+(p-4)x^3+(5-4p+q)x^2+(5p-4q)x+5q$

比較係數可得 $p=2$，$q=-2$

則 $f(x)=x^4-2x^3-5x^2+18x-10$

故 $f(x)$ 為整係數多項式

(2)╳：由(1)可知，$a=18>0$ 且 $b=-10<0$

(3)╳：$f(x)$ 的導函數為 $f'(x)=4x^3-6x^2-10x+18$

因 $f'(2)=6\neq 0$，故函數 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 時沒有極小值

(4) ○：∵$f(x)=(x^2-4x+5)(x^2+2x-2)$

$x^2-4x+5=0$ 無實數解，

$x^2+2x-2=0$ 有兩相異實數解

∴$y=f(x)$ 與 x 軸恰有兩個交點

(5) ╳：∵$f''(x)=12x^2-12x-10$

$$=12\left(x-\left(\frac{3+\sqrt{39}}{6}\right)\right)\left(x-\left(\frac{3-\sqrt{39}}{6}\right)\right)$$

x		$\frac{3-\sqrt{39}}{6}$		$\frac{3+\sqrt{39}}{6}$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
凹口方向	凹口向上		凹口向下		凹口向上

表示函數 $y=f(x)$ 的圖形具有兩個反曲點

故選(1)(4)。

6. (1)(5)

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：空間向量結合行列式與外積的幾何意義

解析：(1) ○：$|(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})\cdot\overrightarrow{v_3}|$ 與 $\left|\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}\right|$ 都是 $\overrightarrow{v_1}$、$\overrightarrow{v_2}$、$\overrightarrow{v_3}$ 所決定的平行六面體體積

(2) ╳：∵ $\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_2}=0$，可知

$\overrightarrow{v_3}\perp\overrightarrow{v_1}$ 與 $\overrightarrow{v_3}\perp\overrightarrow{v_2}$

∴當 $\overrightarrow{v_1}$ 與 $\overrightarrow{v_2}$ 平行，則 $\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{0}$

$\Rightarrow(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})\cdot\overrightarrow{v_3}=0$

當 $\overrightarrow{v_1}$ 與 $\overrightarrow{v_2}$ 不平行 $\Rightarrow\overrightarrow{v_3}\,//\,(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})$

則 $|(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})\cdot\overrightarrow{v_3}|\neq 0$

$\Rightarrow(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})\cdot\overrightarrow{v_3}\neq 0$

(3) ╳：$x\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix}+y\begin{vmatrix} 0 & a \\ d & c \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} a & b \\ c & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}$

$=\left(\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 0 & a \\ d & c \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a & b \\ c & 0 \end{vmatrix}\right)\cdot(x,y,z)$

$=(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})\cdot\overrightarrow{v_3}=0$

當 $\overrightarrow{v_1}$ 與 $\overrightarrow{v_2}$ 平行，則 $\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{0}$，

無法確定「$(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})\,//\,\overrightarrow{v_3}$」與

「$\overrightarrow{v_3}\,//\,\overrightarrow{v_1}$ 或 $\overrightarrow{v_3}\,//\,\overrightarrow{v_2}$」

當 $\overrightarrow{v_1}$ 與 $\overrightarrow{v_2}$ 不平行，則 $\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\neq\overrightarrow{0}$，

又 $(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})\cdot\overrightarrow{v_3}=0$，故可推得

$(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})\perp\overrightarrow{v_3}$，進一步可知三向量會共平面，但不一定會兩兩平行

(4) ╳：同(3)

(5) ○：$\overrightarrow{v_3}$ 可寫成 $m\overrightarrow{v_1}+n\overrightarrow{v_2}$

表示 $\overrightarrow{v_1}$、$\overrightarrow{v_2}$、$\overrightarrow{v_3}$ 共平面

∴ $\overrightarrow{v_1}$、$\overrightarrow{v_2}$、$\overrightarrow{v_3}$ 所決定的平行六面體體積為 0

則 $|(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})\cdot\overrightarrow{v_3}|=0$

$\Rightarrow(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})\cdot\overrightarrow{v_3}=0$，故選(1)(5)。

7. (1)(3)(4)(5)

出處：選修數學甲(下)〈機率統計〉

目標：隨機變數的意義及期望值

解析：(1) ○：依題意知，X_1 是經過 1 次移動後指針所在的數字位置，因此當投擲一次硬幣，出現正面時 $X_1=7$，出現反面時 $X_1=5$

故 $E(X_1)=\frac{1}{2}\times 7+\frac{1}{2}\times 5=6$

(2) ╳：若 $X_2=0$，必為投擲兩次硬幣出現一次正面一次反面的狀況

故 $P(X_2=0)=P(\text{一正一反})=C^2_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

(3) ○：X_3 是指經過 3 次移動後指針所在的數字位置，列舉投擲三次硬幣的狀況如下：

	3 正 0 反	2 正 1 反
移動狀況	順時針移動 21 格	順時針移動 7 格
X_3	9	7
機率	$\frac{C^3_3}{2^3}$	$\frac{C^3_2}{2^3}$
	1 正 2 反	0 正 3 反
移動狀況	逆時針移動 7 格	逆時針移動 21 格
X_3	5	3
機率	$\frac{C^3_1}{2^3}$	$\frac{C^3_0}{2^3}$

$P(5\leq X_3\leq 7)=P(X_3=5)+P(X_3=7)$

$=\frac{C^3_1+C^3_2}{2^3}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

(4) ○：X_4 是經過 4 次移動後指針所在的數字位置，列舉投擲四次硬幣的狀況如下：

	4 正 0 反	3 正 1 反	2 正 2 反
移動狀況	順時針移 28 格	順時針移 14 格	停在原處
X_4	4	2	0
機率	$\frac{C^4_4}{2^4}$	$\frac{C^4_3}{2^4}$	$\frac{C^4_2}{2^4}$

	1 正 3 反	0 正 4 反
移動狀況	逆時針移 14 格	逆時針移 28 格
X_4	10	8
機率	$\frac{C^4_1}{2^4}$	$\frac{C^4_0}{2^4}$

$\sum_{k=0}^{5}P(X_4=2k)$

$=P(X_4=0)+P(X_4=2)+P(X_4=4)+P(X_4=6)$

$+P(X_4=8)+P(X_4=10)$

$=1$

(5) ○：承(4)

$E(X_4)$

$=\dfrac{4\times C^4_4+2\times C^4_3+0\times C^4_2+10\times C^4_1+8\times C^4_0}{2^4}$

$=\dfrac{60}{16}=3.75<4$

故選(1)(3)(4)(5)。

8. (2)(3)(4)

出處：選修數學甲(下)〈複數與多項式方程式〉

目標：複數的運算和極式及其幾何意義

解析：(1) ╳：若 $z=4-4i$，則 $z^2=(4-4i)^2=-32i$

而 $(4-4i)\bar{z}=(4-4i)(4+4i)=32$

故 $z^2\neq(4-4i)\bar{z}$

(2) ○：$\alpha^2=(4-4i)\bar{\alpha}\Rightarrow|\alpha^2|=|(4-4i)\bar{\alpha}|$

$\Rightarrow|\alpha|^2=|(4-4i)|\times|\bar{\alpha}|$

$\Rightarrow|\alpha|^2=4\sqrt{2}\times|\bar{\alpha}|$

$\Rightarrow|\alpha|=4\sqrt{2}$

(3) ○：$\beta=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\alpha\Rightarrow\beta^2=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2\alpha^2$

$\Rightarrow\beta^2=\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\alpha^2$

又 $\alpha^2=(4-4i)\bar{\alpha}$

$\Rightarrow\beta^2=\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4-4i)\bar{\alpha}$

$\Rightarrow\beta^2=(4-4i)\overline{\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)}\times\bar{\alpha}$

$\Rightarrow\beta^2=(4-4i)\overline{\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\alpha}$

$\Rightarrow\beta^2=(4-4i)\bar{\beta}$

(4) ○：承(2)可知 $|z|=4\sqrt{2}$

因此 z 可用極式表示為 $z=4\sqrt{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$

代入 $z^2=(4-4i)\bar{z}$ 可得

$(4\sqrt{2}(\cos\theta+i\sin\theta))^2$

$=(4-4i)4\sqrt{2}(\cos\theta-i\sin\theta)$

$\Rightarrow 32(\cos2\theta+i\sin2\theta)$

$=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)\times4\sqrt{2}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$

$\Rightarrow 32(\cos2\theta+i\sin2\theta)$

$=32\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{4}-\theta\right)+i\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}-\theta\right)\right)$

$\Rightarrow 2\theta=\dfrac{7\pi}{4}-\theta+2k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 3\theta=\dfrac{7\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \theta=\dfrac{7\pi}{12}+\dfrac{2k\pi}{3}$，$k\in\mathbb{Z}$

故滿足 $z^2=(4-4i)\bar{z}$ 的非零複數 z 為

$4\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}+\dfrac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}+\dfrac{2k\pi}{3}\right)\right)$，

其中可取 $k=0$，1，2

取 $k=0$ 時，有最小的主輻角為 $\dfrac{7\pi}{12}$

(5) ╳：承(4)可知，恰有 3 個相異非零複數 z 滿足

$z^2=(4-4i)\bar{z}$

將此三個複數描繪在複數平面上後可圍出正三角形

故正三角形面積為

$3\times\dfrac{1}{2}(4\sqrt{2})^2\times\sin\dfrac{2\pi}{3}=24\sqrt{3}$ (平方單位)

故選(2)(3)(4)。

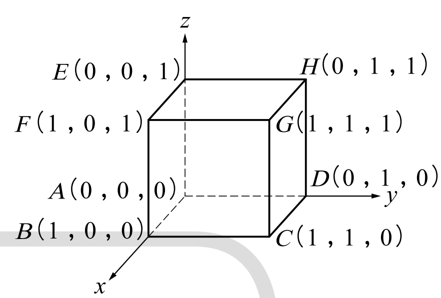
三、選填題

9. $\dfrac{1}{3}$

出處：第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：空間中的平面和直線的關係

解析：將各點坐標化，如下圖所示



$\overrightarrow{CE}=(-1,-1,1)$

$\overleftrightarrow{CE}:\begin{cases}x=1-t\\y=1-t\\z=t\end{cases}$，$0\le t\le1$

令 $P=(1-t,1-t,t)$，$0\le t\le1$，

平面 BPD 的法向量為 $\vec{n}$

則 $\overrightarrow{BP}=(-t,1-t,t)$

$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$

$\therefore\ \vec{n}=\overrightarrow{BP}\times\overrightarrow{BD}$

$=\left(\begin{vmatrix}1-t&t\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}t&-t\\0&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-t&1-t\\-1&1\end{vmatrix}\right)$

$=(-t,-t,1-2t)$

$\because$ 平面 BPD 與 $\overleftrightarrow{AG}$ 不相交，即平面 $BPD\,//\,\overleftrightarrow{AG}$

$\therefore\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AG}$

$\Rightarrow\vec{n}\cdot\overrightarrow{AG}=(-t,-t,1-2t)\cdot(1,1,1)=0$

$\Rightarrow -t-t+1-2t=0$

$\Rightarrow t=\dfrac{1}{4}$

則 $P=\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4}\right)$

$\overline{PC}=\sqrt{\left(1-\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(1-\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(0-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\overline{PE}=\sqrt{\left(0-\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(0-\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(1-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

故 $\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PE}}=\dfrac{1}{3}$。

10. $\dfrac{3}{28}$

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：理解排列或組合的原理

解析：首先觀察題目給定的結構：

$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6$ 且 $a_6>a_7>a_8>a_9$，

其中 a_6 是轉折點

$\because a_6$ 比左邊的 a_5 大，也比右邊的 a_7 大，且數列向兩邊遞減

$\therefore a_6$ 必須是所有數字中的最大值，則 $a_6=9$

剩下的 8 個數字 1、2、……、8 需要被分配到：

左側區域：$L=a_1$、a_2、a_3、a_4、a_5 (共需 5 個數字)

右側區域：$R=a_7$、a_8、a_9 (共需 3 個數字)

一旦選定 5 個數字放入左側區域，為了滿足「遞增」條件，這 5 個數字的排列方式是唯一的

同理，剩下的 3 個數字放入右側，為了滿足「遞減」條件，排列方式也是唯一的

因此，樣本空間的總數 $n(S)$ 等於從 8 個數字中選出 5 個的方法數 C^8_5

設事件 A 為「滿足題目條件且 $a_1>2$」

由於左側數列 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ 是嚴格遞增的，

a_1 必定是左側區域 L 中最小的數字

題目要求 $a_1>2$，這意味著左側區域 L 中的最小值必須大於 2

換句話說，數字 1 和 2 不能出現在左側區域 L 中

既然 1 和 2 不能在左側，它們必須被分配到右側區域 R

剩下的數字為 3、4、5、6、7、8 (共 6 個)

我們需要從這 6 個數字中，選出 5 個填入左側區域 L

則方法數 $n(A)$ 為 C^6_5

故 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{C^6_5}{C^8_5}=\dfrac{6}{56}=\dfrac{3}{28}$。

11. $3\sqrt{13}$

出處：第一冊〈直線與圓〉、第二冊〈三角比〉

目標：能正確解讀題意，利用圓、餘弦定理結合和角公式的應用

解析：令 $\angle DFE=180^\circ-\angle AFD-\angle CFE=\theta$

$\angle B=180^\circ-\angle A-\angle C$

$=180^\circ-\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle AFD)-\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle CFE)$

$=\dfrac{1}{2}(\angle AFD+\angle CFE)$

$=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\theta)$

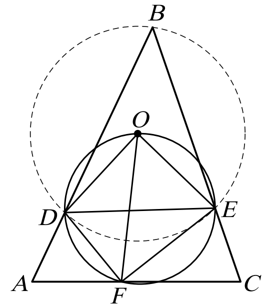
$\therefore \theta=180^\circ-2\angle B$

$\because O$ 為$\triangle BDE$ 的外接圓圓心

$\therefore \angle DOE=2\angle B$

$\Rightarrow \angle DFE+\angle DOE=\theta+2\angle B=180^\circ$

故 O、D、E、F 四點共圓且 $\overline{OD}=\overline{OE}$ (皆為$\triangle BDE$ 之外接圓半徑)



$\therefore \angle DFO=\angle OFE$ (對應等弧)

令$\triangle BDE$ 之外接圓半徑為 r

$\cos\angle DFO=\cos\angle OFE$

$\Rightarrow \dfrac{9^2+15^2-r^2}{2\times9\times15}=\dfrac{15^2+12^2-r^2}{2\times15\times12}$

$\Rightarrow r=\pm3\sqrt{13}$ (負不合)

故所求為 $3\sqrt{13}$ 。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. $(0\,,0\,,2)$

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：理解點代入三次函數求係數

解析：$f(-1)=1$、$f(0)=2$、$f(1)=3$ 代入解聯立方程式

$\begin{cases}-1+b-c+d=1\\ d=2\\ 1+b+c+d=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=0\\ c=0\\ d=2\end{cases}$

故序組 $(b\,,c\,,d)=(0\,,0\,,2)$。

13. -1

出處：第一冊〈多項式函數〉、第三冊〈平面向量〉、選修數學甲(上)〈微分〉

目標：多項式函數結合向量與微分的應用

解析：設 $\overrightarrow{CP}$ 與 $\overrightarrow{CR}$ 的夾角為 θ

$f(x)=x^3+2$

$f'(x)=3x^2$

$f''(x)=6x$

令 $f''(x)=0\Rightarrow x=0$

得反曲點坐標為 $C(0\,,f(0))=C(0\,,2)$

$\overrightarrow{CP}=(-1\,,-1)$、$\overrightarrow{CR}=(1\,,1)$

所求為 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CR}}{|\overrightarrow{CP}||\overrightarrow{CR}|}=\dfrac{-1-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-1$。

◎評分原則

設 $\overrightarrow{CP}$ 與 $\overrightarrow{CR}$ 的夾角為 θ

$f(x)=x^3+2$

$f'(x)=3x^2$

$f''(x)=6x$ (1 分)

令 $f''(x)=0\Rightarrow x=0$

得反曲點坐標為 $C(0\,,f(0))=C(0\,,2)$ (1 分)

$\overrightarrow{CP}=(-1\,,-1)$、$\overrightarrow{CR}=(1\,,1)$

所求為 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CR}}{|\overrightarrow{CP}||\overrightarrow{CR}|}=\dfrac{-1-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-1$。 (2 分)

14. $\dfrac{27}{4}$ 平方單位

出處：選修數學甲(上)〈積分〉

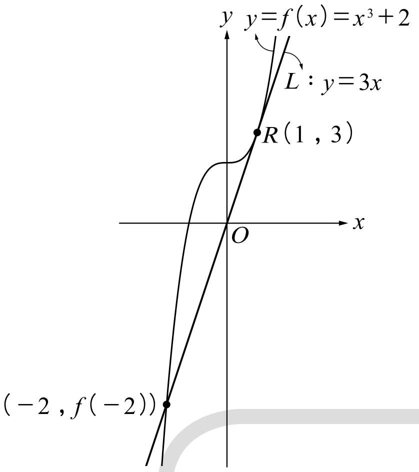
目標：利用積分求解圖形的面積

解析：$f'(x)=3x^2$，$f'(1)=3\times1^2=3$

$L：y-3=3(x-1)\Rightarrow y=3x$

解 $\begin{cases} y=x^3+2 \\ y=3x \end{cases} \Rightarrow x^3-3x+2=0\Rightarrow (x-1)^2(x+2)=0$

$\Rightarrow x=1$ 或 -2



所圍成的面積為

$\int_{-2}^{1}[(x^3+2)-(3x)]dx$

$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx$

$=\left(\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{3}{2}x^2+2x\right)\Big|_{-2}^{1}$

$=\left(\dfrac{1}{4}\times1^4-\dfrac{3}{2}\times1^2+2\times1\right)$

$-\left[\dfrac{1}{4}\times(-2)^4-\dfrac{3}{2}\times(-2)^2+2\times(-2)\right]$

$=\dfrac{3}{4}+6=\dfrac{27}{4}$ (平方單位)。

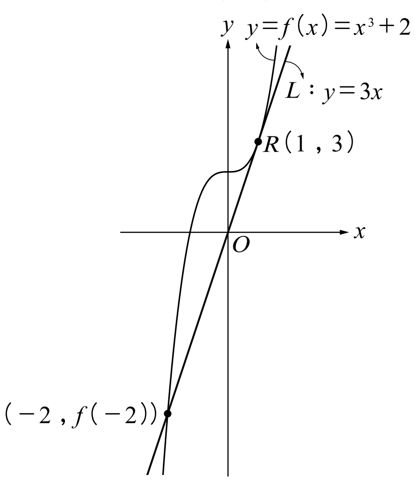
◎評分原則

$f'(x)=3x^2$，$f'(1)=3\times1^2=3$

$L：y-3=3(x-1)\Rightarrow y=3x$ (1 分)

解 $\begin{cases} y=x^3+2 \\ y=3x \end{cases} \Rightarrow x^3-3x+2=0\Rightarrow (x-1)^2(x+2)=0$

$\Rightarrow x=1$ 或 -2 (1 分)



所圍成的面積為

$\int_{-2}^{1}[(x^3+2)-(3x)]dx$

$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx=\left(\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{3}{2}x^2+2x\right)\Big|_{-2}^{1}$ (1 分)

$=\left(\dfrac{1}{4}\times1^4-\dfrac{3}{2}\times1^2+2\times1\right)$

$-\left[\dfrac{1}{4}\times(-2)^4-\dfrac{3}{2}\times(-2)^2+2\times(-2)\right]$

$=\dfrac{3}{4}+6=\dfrac{27}{4}$ (平方單位)。 (1 分)

15. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

出處：選修數學甲(下)〈二次曲線〉

目標：橢圓的參數式

解析：$\because \Gamma:\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 且 S 在橢圓 Γ 上，利用橢圓的參數式，令 $S(2\sqrt{2}\cos\theta, 2\sin\theta)$，$0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore OPSQ$ 面積＝$\triangle OPS$ 面積＋$\triangle OQS$ 面積

$=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times(2\sin\theta)+\dfrac{1}{2}\times2\times(2\sqrt{2}\cos\theta)$

$=2\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)$

$=2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=4\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

當 $\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ 時，

$OPSQ$ 面積有最大值為 4，此時 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

則 $S\left(2\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}, 2\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=S(2, \sqrt{2})$

故直線 OS 的斜率為 $\dfrac{\sqrt{2}-0}{2-0}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 。

◎評分原則

$\because \Gamma:\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 且 S 在橢圓 Γ 上，利用橢圓的參數式，

令 $S(2\sqrt{2}\cos\theta, 2\sin\theta)$，$0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}$ (1 分)

$\therefore OPSQ$ 面積＝$\triangle OPS$ 面積＋$\triangle OQS$ 面積

$=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times(2\sin\theta)+\dfrac{1}{2}\times2\times(2\sqrt{2}\cos\theta)$

$=2\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)$

$=2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=4\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ (1 分)

當 $\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ 時，

$OPSQ$ 面積有最大值為 4，此時 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

則 $S\left(2\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}, 2\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=S(2, \sqrt{2})$ (1 分)

故直線 OS 的斜率為 $\dfrac{\sqrt{2}-0}{2-0}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 。 (1 分)

16. $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，新橢圓 Γ' 的方程式為 $5x^2-2\sqrt{3}\,xy+7y^2=32$

出處：選修數學甲(下)〈二次曲線〉

目標：橢圓的定義結合平面上的線性變換

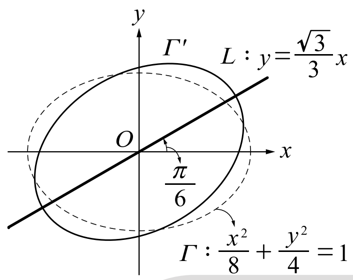
解析：由 $m=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 可推得直線 L 的斜率 m 為 $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，

故 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

且新橢圓 Γ' 的長軸與直線 L 重合，

可知新橢圓 Γ' 為橢圓 Γ 的圖形以原點 $O(0\,,0)$ 為中心逆時針方向旋轉 $\dfrac{\pi}{6}$ 而得

如下圖



設原坐標為 $(x_0\,,y_0)$，

旋轉後坐標為 $(x_1\,,y_1)$

依題意可得

$$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6}\\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_0-\dfrac{1}{2}y_0\\ \dfrac{1}{2}x_0+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y_0\end{bmatrix}$$

因此 $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_0-\dfrac{1}{2}y_0=x_1\\ \dfrac{1}{2}x_0+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y_0=y_1\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_0=\dfrac{\sqrt{3}x_1+y_1}{2}\\ y_0=\dfrac{-x_1+\sqrt{3}y_1}{2}\end{cases}$

$\because$ 點 $(x_0\,,y_0)$ 在橢圓 Γ：$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上

即表示 $\dfrac{{x_0}^2}{8}+\dfrac{{y_0}^2}{4}=1$，

代入 $\begin{cases}x_0=\dfrac{\sqrt{3}x_1+y_1}{2}\\ y_0=\dfrac{-x_1+\sqrt{3}y_1}{2}\end{cases}$

得 $\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}x_1+y_1}{2}\right)^2}{8}+\dfrac{\left(\dfrac{-x_1+\sqrt{3}y_1}{2}\right)^2}{4}=1$

$\Rightarrow \dfrac{3{x_1}^2+2\sqrt{3}x_1y_1+{y_1}^2}{32}+\dfrac{{x_1}^2-2\sqrt{3}x_1y_1+3{y_1}^2}{16}=1$

$\Rightarrow 5{x_1}^2-2\sqrt{3}\,x_1y_1+7{y_1}^2=32$

即代表點 $(x_1\,,y_1)$ 滿足方程式 $5x^2-2\sqrt{3}\,xy+7y^2=32$。

◎**評分原則**

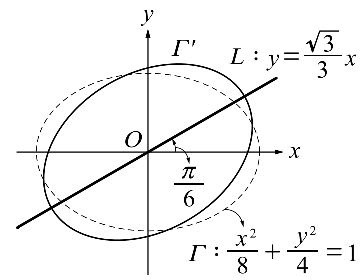
由 $m=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 可推得直線 L 的斜率 m 為 $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，

故 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$　(1 分)

且新橢圓 Γ' 的長軸與直線 L 重合，

可知新橢圓 Γ' 為橢圓 Γ 的圖形以原點 $O(0\,,0)$ 為中心逆時針方向旋轉 $\dfrac{\pi}{6}$ 而得

如下圖



設原坐標為 $(x_0\,,y_0)$，

旋轉後坐標為 $(x_1\,,y_1)$

依題意可得

$$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6}\\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_0-\dfrac{1}{2}y_0\\ \dfrac{1}{2}x_0+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y_0\end{bmatrix}\quad (1\text{ 分})$$

因此 $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_0-\dfrac{1}{2}y_0=x_1\\ \dfrac{1}{2}x_0+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y_0=y_1\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_0=\dfrac{\sqrt{3}x_1+y_1}{2}\\ y_0=\dfrac{-x_1+\sqrt{3}y_1}{2}\end{cases}$　(1 分)

$\because$ 點 $(x_0\,,y_0)$ 在橢圓 Γ：$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上

即表示 $\dfrac{{x_0}^2}{8}+\dfrac{{y_0}^2}{4}=1$，

代入 $\begin{cases}x_0=\dfrac{\sqrt{3}x_1+y_1}{2}\\ y_0=\dfrac{-x_1+\sqrt{3}y_1}{2}\end{cases}$

得 $\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}x_1+y_1}{2}\right)^2}{8}+\dfrac{\left(\dfrac{-x_1+\sqrt{3}y_1}{2}\right)^2}{4}=1$

$\Rightarrow \dfrac{3{x_1}^2+2\sqrt{3}x_1y_1+{y_1}^2}{32}+\dfrac{{x_1}^2-2\sqrt{3}x_1y_1+3{y_1}^2}{16}=1$

$\Rightarrow 5{x_1}^2-2\sqrt{3}\,x_1y_1+7{y_1}^2=32$

即代表點 $(x_1\,,y_1)$ 滿足方程式

$5x^2-2\sqrt{3}\,xy+7y^2=32$。　(2 分)

17. 2

出處：選修數學甲(下)〈二次曲線〉

目標：了解橢圓的長軸與短軸的關係

解析：新橢圓 Γ' 的半短軸長即為原橢圓 Γ 的半短軸長

由 Γ: $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，可得半短軸長為 2。

◎評分原則

新橢圓 Γ' 的半短軸長即為原橢圓 Γ 的半短軸長 (2 分)
由 Γ: $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，可得半短軸長為 2。 (1 分)