

北北基高級中等學校

114 學年度分科測驗聯合模擬考試

數學甲考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

—作答注意事項—

考試範圍：第一～二冊、數學A 第三～四冊、選修數學甲(全)

考試時間：80 分鐘

作答方式：

- 選擇(填)題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶(液)。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正帶(液)。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是  $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上的第 18-1 列的  $\frac{3}{\square}$  與第 18-2 列的  $\frac{\square}{8}$  劃記，如：

18-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
18-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若答案格式是  $\frac{\textcircled{19-1} \textcircled{19-2}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的  $\frac{\square}{\square}$  與第 19-2 列的  $\frac{7}{\square}$  劃記，如：

19-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

選擇(填)題計分方式：

- 單選題：每題有  $n$  個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有  $n$  個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯  $k$  個選項者，得該題  $\frac{n-2k}{n}$  的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有  $n$  個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

祝考試順利



版權所有 · 翻印必究

## 第壹部分、選擇（填）題（占 76 分）

### 一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

1. 某電腦公司研發一個測量螢幕雜訊的方法：若螢幕每平方公分有  $n$  個雜訊點，則其雜訊程度  $r(n)$  定義為  $r(n) = a + b \log_2 n$ ，且  $r(1) = 1$ ， $r(4) = 1.2$ 。某天測量  $A$  與  $B$  兩種品牌的螢幕，發現  $A$  螢幕的雜訊程度為 17.4， $B$  螢幕的雜訊程度為 15.2。若  $A$  螢幕每平方公分的雜訊點個數是  $B$  螢幕每平方公分的雜訊點個數的  $k$  倍，試求  $k$  值為何？
- (1)  $2^{2.2}$   
(2)  $2^{12}$   
(3)  $2^{22}$   
(4)  $2^{32.6}$   
(5)  $2^{20}$
2. 在坐標平面上，已知  $\triangle ABC$  滿足  $\overrightarrow{AB} = (7, 14)$ ， $\overrightarrow{AC} = (7, -14)$ 。若點  $P$  在  $\triangle ABC$  內部，且  $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{7} \overrightarrow{AC}$ ，試求  $\triangle ABP$  面積為何？
- (1)  $\frac{7}{2}$  平方單位  
(2)  $\frac{21}{5}$  平方單位  
(3)  $\frac{84}{5}$  平方單位  
(4) 21 平方單位  
(5) 28 平方單位
3. 試問極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times (4-6n)^3 + 4 \times (8-6n)^3 + \dots + 4 \times [4(n-1)-6n]^3}{n^4}$  的值可以用下列哪一個定積分表示？
- (1)  $\int_0^4 (4-6x)^3 dx$   
(2)  $\int_0^4 (4x-6)^3 dx$   
(3)  $\int_0^4 (x-4)^3 dx$   
(4)  $\int_0^4 (x-6)^3 dx$   
(5)  $\int_0^4 (6x-4)^3 dx$

## 二、多選題 (占 40 分)

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

4. 設  $a, b$  為實數，已知  $1 \leq a \leq 5, 2 \leq b \leq 6$ ，若實數  $x$  滿足  $|x-a| \leq b$ ，試選出正確的選項。

- (1)  $a, b$  可能相等
- (2)  $a+b$  可能等於 2
- (3)  $x$  可能等於  $-7$
- (4)  $x$  可能的值必滿足  $x \geq -5$
- (5)  $x=4$  必滿足不等式  $|x-b| \leq a$

5. 考慮實係數多項式  $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + ax + b$ ，已知方程式  $f(x) = 0$  有一虛根  $2+i$ ，其中  $i = \sqrt{-1}$ ，試選出正確的選項。

- (1)  $f(x)$  為整係數多項式
- (2)  $a < 0$  且  $b > 0$
- (3) 函數  $y=f(x)$  在  $x=2$  時有極小值
- (4) 函數  $y=f(x)$  的圖形與  $x$  軸恰有兩個交點
- (5) 函數  $y=f(x)$  的圖形只有一個反曲點

6. 設  $a, b, c, d, x, y, z$  皆為實數，已知坐標空間中三個非零向量  $\vec{v}_1 = (a, b, 0)$ 、 $\vec{v}_2 = (c, 0, d)$  及  $\vec{v}_3 = (x, y, z)$ ，試問下列選項哪些正確？

(1)  $|(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}$

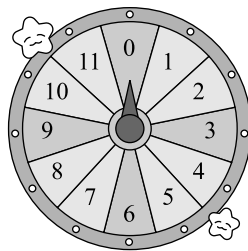
(2) 若內積  $\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2 = 0$ ，則  $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = 0$

(3) 若  $x \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 0 & a \\ d & c \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} a & b \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0$ ，則  $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \parallel \vec{v}_3$

(4) 若  $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} = 0$ ，則  $\vec{v}_3 \parallel \vec{v}_1$  或  $\vec{v}_3 \parallel \vec{v}_2$

(5) 若  $\vec{v}_3$  可寫成  $m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2$ ，其中  $m, n$  為實數，則  $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = 0$

7. 有一個依順時針方向依序標示  $0, 1, \dots, 11$  數字的嘉年華大轉盤 (如右圖所示), 指針一開始的位置在  $0$ , 每回合投擲一枚均勻的硬幣, 根據投擲結果, 依照以下規則移動指針的位置:



- ①若出現正面: 從當前位置順時針移動 7 格。  
②若出現反面: 從當前位置逆時針移動 7 格。

對任一正整數  $n$ , 令隨機變數  $X_n$  表示依上述規則經過  $n$  次移動後指針

所在的數字,  $P(X_n=k)$  代表  $X_n=k$  的機率, 其中  $k=0, 1, 2, \dots, 11$ , 且令  $E(X_n)$  代表  $X_n$  的期望值。試選出正確的選項。

(1)  $E(X_1)=6$

(2)  $P(X_2=0)=\frac{1}{4}$

(3)  $P(5 \leq X_3 \leq 7)=\frac{3}{4}$

(4)  $\sum_{k=0}^5 P(X_4=2k)=1$

(5)  $E(X_4) < 4$

版權所有  
翻印必究

8. 複數平面上, 設  $\bar{z}$  表示複數  $z$  的共軛複數, 且  $i=\sqrt{-1}$ , 試選出正確的選項。

(1) 若  $z=4-4i$ , 則必滿足  $z^2=(4-4i)\bar{z}$

(2) 若非零複數  $\alpha$  滿足  $\alpha^2=(4-4i)\bar{\alpha}$ , 則  $|\alpha|=4\sqrt{2}$

(3) 若非零複數  $\alpha$  滿足  $\alpha^2=(4-4i)\bar{\alpha}$ , 且令  $\beta=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\alpha$ , 則  $\beta^2=(4-4i)\bar{\beta}$

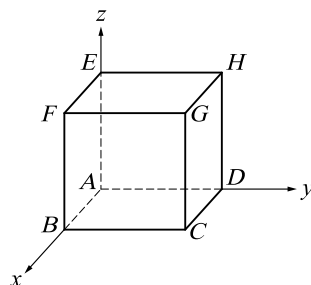
(4) 所有滿足  $z^2=(4-4i)\bar{z}$  的非零複數  $z$  中, 其主幅角的最小可能值為  $\frac{7\pi}{12}$

(5) 將所有滿足  $z^2=(4-4i)\bar{z}$  的非零複數  $z$  描繪在複數平面上可圍成一正多邊形, 則此正多邊形面積為  $8\sqrt{3}$  平方單位

三、選填題 (占 18 分)

說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分。

9. 如右圖，在坐標空間中， $A, B, C, D, E, F, G, H$  為正立方體的八個頂點，已知其中四個點的坐標  $A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), D(0, 1, 0), E(0, 0, 1)$ 。在對角線  $CE$  上取一點  $P$ ，若空間中通過  $P, D, B$  三點的平面與直線  $AG$  不相交，則比值



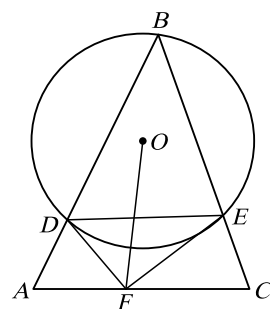
$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PE}} = \frac{\textcircled{9-1}}{\textcircled{9-2}} \quad \text{。 (化為最簡分數)}$$

10. 將數字 1、2、3、……、9 等 9 個數字排成九位數 (數字不得重複)，設此九位數的各個數字由左至右分別為  $a_1, a_2, \dots, a_9$ ，且此數列滿足以下兩個條件：  
 ① 前 6 位從左至右遞增 (即  $a_1 < a_2 < \dots < a_6$ )。  
 ② 後 4 位從左至右遞減 (即  $a_6 > a_7 > a_8 > a_9$ )。

試問在上述條件下，首位數字  $a_1 > 2$  的機率為  $\frac{\textcircled{10-1}}{\textcircled{10-2} \textcircled{10-3}}$ 。(化為最簡分數)

11. 如右圖，在  $\triangle ABC$  之三邊  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$  上分別取點  $D, E, F$ ，使得  $\overline{AF} = \overline{FD} = 9, \overline{CF} = \overline{FE} = 12$ 。設  $\triangle BDE$  之外接圓圓心為  $O$ ，已

知  $\overline{OF} = 15$ ，則  $\triangle BDE$  之外接圓半徑為  $\frac{\textcircled{11-1} \sqrt{\textcircled{11-2} \textcircled{11-3}}}{\textcircled{11-1}}$ 。  
 (化為最簡根式)



## 第貳部分、混合題或非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有 2 題組，選填題每題 4 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選填題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

### 12-14 題為題組

已知實係數三次多項式函數  $y=f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ ，其圖形與直線  $y=x+2$  交於相異三點  $P(-1, 1)$ 、 $Q(0, 2)$ 、 $R(1, 3)$ 。設  $O$  為原點， $C$  為  $y=f(x)$  的反曲點，直線  $L$  為  $y=f(x)$  在  $R$  點的切線。根據上述條件，試回答下列問題。

12. 序組  $(b, c, d) = \underline{\quad (\textcircled{12-1}), (\textcircled{12-2}), (\textcircled{12-3}) \quad}$ 。(選填題，4 分)

13. 試求  $\vec{CP}$  與  $\vec{CR}$  夾角的餘弦值。(非選擇題，4 分)

14. 試求函數  $y=f(x)$  和直線  $L$  所圍成有界區域的面積。(非選擇題，4 分)

版權所有  
翻印必究

## 15-17 題為題組

坐標平面上，有一橢圓  $\Gamma: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$  與一直線  $L: y = mx$ ，其中  $m$  為實數，將橢圓  $\Gamma$  的

圖形以原點  $O(0, 0)$  為中心逆時針方向旋轉  $\theta$  (其中  $0 < \theta < \pi$ ) 後，得新橢圓

$\Gamma': Ax^2 + Bxy + Cy^2 = D$ ，根據上述條件，試回答下列問題。

15. 今橢圓  $\Gamma$  與  $x$  軸正向交點為  $P$ ，與  $y$  軸正向交點為  $Q$ ，若橢圓  $\Gamma$  在第一象限上有一點  $S$ ，使得四邊形  $OPSQ$  的面積最大，試求此時直線  $OS$  的斜率。(非選擇題，4 分)

16. 當  $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$  時，新橢圓  $\Gamma'$  的長軸與直線  $L$  重合，試求  $\theta$  的值與新橢圓  $\Gamma'$  的方程式。  
(非選擇題，5 分)

17. 承 16. 題，試求新橢圓  $\Gamma'$  的半短軸長。(非選擇題，3 分)

版權所有  
翻印必究

## 參考公式及可能用到的數值

1. 首項為  $a$ ，公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為  $a$ ，公比為  $r (r \neq 1)$  的等比數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和： $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ； $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

4.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  ( $R$  為  $\triangle ABC$  外接圓半徑)

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

5. 一維數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ,

算術平均數  $\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ；標準差  $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n\mu_X^2}$

6. 二維數據  $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ,

相關係數  $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

最適直線 (迴歸直線) 方程式  $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

7. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

8. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 5 \approx 0.6990$ ， $\log 7 \approx 0.8451$

9. 若  $X \sim B(n, p)$  為二項分布，則期望值  $E(X) = np$ ，變異數  $\text{Var}(X) = np(1-p)$ ；

若  $X \sim G(p)$  為幾何分布，則期望值  $E(X) = \frac{1}{p}$ ，變異數  $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$