

北北基高級中等學校
114 學年度分科測驗聯合模擬考試

數
乙
A

數學乙
考科
A
卷
參考
答案
暨
詳
解

版權所有
翻印必究

翰林出版事業股份有限公司



版權所有 · 翻印必究

數學乙考科 A 卷詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(4)	(3)	(5)	(5)	(4)	(1)(5)
8.	9.					
(1)(2)(5)	(3)(4)					

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

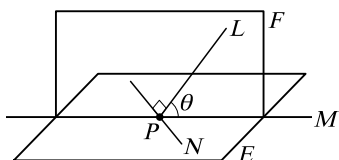
1. (2)

出處：第四冊 A〈空間向量〉、

第四冊 B〈空間概念與空間坐標系〉

目標：空間概念

解析：如下圖，



在平面 E 上，過 P 點且與 L 垂直的直線 N 即為所求

$\therefore$ 只有一條

故選(2)。

2. (4)

出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊 A〈指數與對數函數〉、
第三冊 B〈按比例成長模型〉

目標：能正確的列出直線方程式、能進行簡單的對數運算

解析：先求出直線的方程式

$$\text{斜率 } m = \frac{\log 6 - \log 3}{6 - 3} = \frac{\log 2}{3}$$

$$\therefore \text{直線的方程式為 } y - \log 3 = \frac{\log 2}{3}(x - 3)$$

$$\text{將 } x = 12 \text{ 代入，得 } y - \log 3 = \frac{\log 2}{3}(12 - 3) = 3 \log 2$$

$$\Rightarrow y = 3 \log 2 + \log 3 = \log 2^3 + \log 3 = \log (8 \times 3) = \log 24$$

故選(4)。

〈另解〉

依相似三角形對應邊成比例

$$\text{直線斜率 } m = \frac{\log 6 - \log 3}{6 - 3} = \frac{y - \log 6}{12 - 6}$$

$$\Rightarrow \frac{\log 2}{3} = \frac{y - \log 6}{6}$$

$$\Rightarrow y - \log 6 = 2 \log 2 = \log 4$$

$$\Rightarrow y = \log 4 + \log 6 = \log 24$$

故選(4)。

3. (3)

出處：第四冊 A〈機率〉、第四冊 B〈機率〉、

第四冊 A〈矩陣〉、第四冊 B〈矩陣與資料表格〉

目標：能正確的處理矩陣運算、能瞭解條件機率的定義及運算

$$\text{解析：} A + 2I = aI + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = (a-2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-2 & b \\ b & a-2 \end{bmatrix}$$

$$\because A^{-1} \text{ 存在 } \therefore (a-2)^2 - b^2 \neq 0$$

$$\textcircled{1} a=1 \text{ 時，} b=2, 3, 4, 5, 6$$

$$\textcircled{2} a=2 \text{ 時，} b=1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$\textcircled{3} a=3 \text{ 時，} b=2, 3, 4, 5, 6$$

$$\textcircled{4} a=4 \text{ 時，} b=1, 3, 4, 5, 6$$

$$\textcircled{5} a=5 \text{ 時，} b=1, 2, 4, 5, 6$$

$$\textcircled{6} a=6 \text{ 時，} b=1, 2, 3, 5, 6$$

以上共 31 種

兩次點數和為偶數的情形：

$$\textcircled{1} a=1 \text{ 時，} b=3, 5$$

$$\textcircled{2} a=2 \text{ 時，} b=2, 4, 6$$

$$\textcircled{3} a=3 \text{ 時，} b=3, 5$$

$$\textcircled{4} a=4 \text{ 時，} b=4, 6$$

$$\textcircled{5} a=5 \text{ 時，} b=1, 5$$

$$\textcircled{6} a=6 \text{ 時，} b=2, 6$$

以上共 13 種

$$\text{樣本空間數 } n(S) = 36, \text{ 所求條件機率為 } \frac{\frac{13}{36}}{\frac{36}{31}} = \frac{13}{31}$$

故選(3)。

4. (5)

出處：選修數學乙(上)〈微分〉

目標：能正確的處理導數的運算

$$\text{解析：} f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x+1}{x-1} - 3}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1) - 3(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x-2)}{(x-2)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{x-1} = -2 \end{aligned}$$

故選(5)。

5. (5)

出處：選修數學乙(上)〈積分〉

目標：能正確的處理積分的運算

$$\text{解析：} \textcircled{1} \text{ 當 } x < 0 \text{ 時，} f(x) = x|x-2| + |2x|$$

$$= x(-x+2) + (-2x) = -x^2$$

$$\textcircled{2} \text{ 當 } 0 \leq x < 2 \text{ 時，} f(x) = x|x-2| + |2x|$$

$$= x(-x+2) + 2x = -x^2 + 4x$$

$$\textcircled{3} \text{ 當 } x \geq 2 \text{ 時，} f(x) = x|x-2| + |2x|$$

$$= x(x-2) + 2x = x^2$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 f(x) dx &= \int_{-1}^0 -x^2 dx + \int_0^2 (-x^2 + 4x) dx + \int_2^3 x^2 dx \\ &= -\frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^0 + \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^2 + \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 \\ &= 0 - \frac{1}{3} + \left(-\frac{8}{3} + 8 \right) - 0 + 9 - \frac{8}{3} \\ &= \frac{34}{3} \end{aligned}$$

故選(5)。

6. (4)

出處：選修數學乙(上)〈極限與函數〉

目標：能瞭解極限的定義及運算

$$\begin{aligned}
 \text{解析：} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} & (\sqrt{1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1)} \\
 & - \sqrt{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (\sqrt{1^2 + 1 + (2^2 + 2) + \dots + (n^2 + n)} \\
 & - \sqrt{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (\sqrt{1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (1 + 2 + \dots + n)} \\
 & - \sqrt{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (1 + 2 + \dots + n) - (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (1 + 2 + \dots + n)} + \sqrt{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1 + 2 + \dots + n}{\sqrt{1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (1 + 2 + \dots + n)} + \sqrt{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}} + \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}} \right) \\
 & \quad (\text{分子分母的分式都是 } n \text{ 的 } 2 \text{ 次方}) \\
 &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

故選(4)。

二、多選題

7. (1)(5)

出處：第二冊〈數列與級數〉、第二冊〈排列組合與機率〉

目標：數列、級數與集合的概念與運算

$$\begin{aligned}
 \text{解析：(1) } \bigcirc : & \text{ 等差數列中， } a_1 + a_6 = a_2 + a_5 \\
 &= a_3 + a_4 = 2a_1 + 5d, \\
 & \text{故 } a_1 + a_2 + a_5 + a_6 = 2(a_3 + a_4) \\
 (2) \times : & \text{ 等比數列中， } \\
 & (a_1 + a_4) - (a_2 + a_3) = a_1(1 + r^3 - r - r^2) \\
 &= a_1(r-1)^2(r+1) \text{ 的正負值由 } (r+1) \text{ 決定} \\
 (3) \times : & n(A) = 1000, n(A \cap B) = \{1^6, 2^6, \dots, 10^6\} \\
 & \text{則 } n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \\
 &= 1000 - 10 = 990 \\
 (4) \times : & 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \dots + 99^2 - 100^2 \\
 &= (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + (5^2 - 6^2) + \dots \\
 & \quad + (99^2 - 100^2) \\
 &= -3 - 7 - 11 - \dots - 199 \\
 &= -(3 + 7 + 11 + \dots + 199) \\
 (5) \bigcirc : & 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \dots + (2n-1)^2 \\
 & \quad - (2n)^2 + (2n+1)^2 \\
 &= -(3 + 7 + 11 + \dots + (4n-1)) + (2n+1)^2 \\
 &= -\frac{n(3 + (4n-1))}{2} + (2n+1)^2 \\
 &= 2n^2 + 3n + 1 \\
 &= (n+1)(2n+1) > 0
 \end{aligned}$$

〈另解〉

共有 $2n+1$ 項

原式化為

$$\begin{aligned}
 & 1^2 + (-2^2 + 3^2) + (-4^2 + 5^2) + \dots \\
 & + (-(2n)^2 + (2n+1)^2) \\
 &= 1 + 5 + 9 + \dots + (4n+1) > 0
 \end{aligned}$$

故選(1)(5)。

8. (1)(2)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉、第一冊〈直線與圓〉

目標：能正確的處理三次函數、圓的相關問題

解析：(1) $\bigcirc$: $y = (x-1)^3 + x = (x-1)^3 + (x-1) + 1$ 符合三次函

數的標準式 $y = a(x-h)^3 + p(x-h) + k$

故圖形通過 $(1, 1)$ ，且 $(1, 1)$ 為其圖形的對稱中心

(2) $\bigcirc$: 承(1) $\therefore a=1, p=1, ap>0$

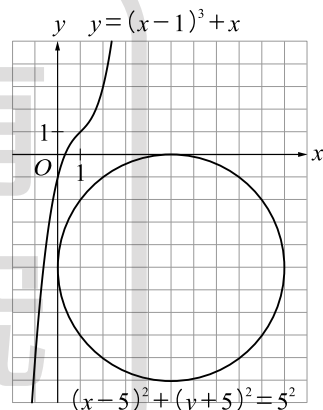
$\therefore$ 圖形為嚴格遞增，故只會和 x 軸相交於一點

(3) $\times$: $x^2 + y^2 - 10x + 10y + 25 = 0$ ，整理得

$$(x-5)^2 + (y+5)^2 = 5^2$$

得圖形為一圓，圓心 $(5, -5)$ ，半徑為 5，

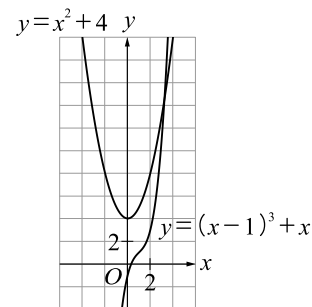
如下圖



$\therefore$ 三次函數在第四象限只會經過 $(0, 0)$ ， $(1, 0)$ ， $(0, -1)$ ， $(1, -1)$ 所形成的正方形區域，而圓不會經過此區域

$\therefore$ 兩圖形無交點

(4) $\times$: 如下圖



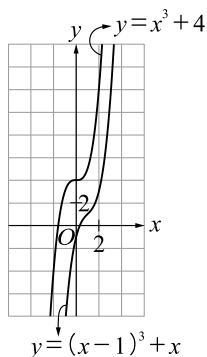
對任意一個實數 x 而言，將兩個 y 值相減得

$$\begin{aligned}
 (x^2 + 4) - ((x-1)^3 + x) &= (x^2 + 4) - (x^3 - 3x^2 + 4x - 1) \\
 &= -x^3 + 4x^2 - 4x + 5 \text{ 為三次函數}
 \end{aligned}$$

x 值很大時其值為負值， x 值很小時其值為正值

故 $y = x^2 + 4$ 的圖形不一定恆在 $y = (x-1)^3 + x$ 的圖形的上方

(5) ○：如下圖，



對任意一個實數 x 而言，將兩個 y 值相減得
 $(x^3+4)-((x-1)^3+x)=(x^3+4)-(x^3-3x^2+4x-1)$
 $=3x^2-4x+5$ 為二次函數，其開口朝上且
 $D < 0$ ，其值恆正
 故 $y=x^3+4$ 的圖形恆在 $y=(x-1)^3+x$ 的圖形
 的上方

故選(1)(2)(5)。

9. (3)(4)

出處：選修數學乙(上)〈極限與函數〉

目標：能瞭解極限的定義及運算

解析：①設 $0 < x < 1$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 3x}{2x^n - 4x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3x}{-4x} = \frac{3}{4}$

②設 $x = 1$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 3x}{2x^n - 4x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3}{2-4} = 1$

③設 $x > 1$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 3x}{2x^n - 4x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{x^{n-1}}}{2 - \frac{4}{x^{n-1}}} = \frac{1}{2}$

由上述討論，故選(3)(4)。

三、選填題

10. $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

出處：第三冊 A 〈平面向量〉、

第三冊 B 〈平面向量與應用〉

目標：能正確的處理平面中的向量運算

解析：依題意 $A(3, 4)$ ，與 $\overrightarrow{OA}$ 垂直的向量為 $t(4, -3)$ ，
 其中 t 為實數

因為是向右轉 10 單位，取 $t = 2$ ，

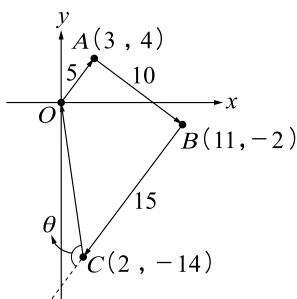
得 $\overrightarrow{AB} = (8, -6) \Rightarrow B(11, -2)$

與 $\overrightarrow{AB}$ 垂直的向量為 $s(3, 4)$

因為是向右轉 15 單位，取 $s = -3$ ，

得 $\overrightarrow{BC} = (-9, -12) \Rightarrow C(2, -14)$ ，

這時他想回到 $O(0, 0)$ ，得 $\overrightarrow{CO} = (-2, 14)$



利用向量的內積公式 $\overrightarrow{BC}$ 與 $\overrightarrow{CO}$ 的夾角 θ ，

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(-9, -12) \cdot (-2, 14)}{|(-9, -12)| |(-2, 14)|} \\ &= \frac{-150}{15 \times \sqrt{200}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

〈另解〉

$\overline{OB} = 5\sqrt{5}$ ， $\overline{BC} = 15$ ， $\overline{CO} = \sqrt{200}$ ，

可利用餘弦定理求出

$$\begin{aligned} \cos \angle OCB &= \frac{(\sqrt{200})^2 + 15^2 - (5\sqrt{5})^2}{2 \times \sqrt{200} \times 15} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

故 $\cos \theta = \cos(180^\circ - \angle OCB)$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

11. $y' = 2x' + 40$

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：能正確的處理相關係數、最適直線等問題

解析：設 xy 的相關係數 $r_{xy} = r$

由題意可知，最適直線方程式的斜率

$$\frac{2}{9} = r \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = r \times \frac{2}{6}$$

$$\text{解得 } r = \frac{2}{3}$$

將其數值前後順序互換後，相關係數依然不變，

$$r_{x'y'} = r_{xy} = r = \frac{2}{3}$$

故得到新的最適直線方程式為 $y' - 80 = \frac{2}{3} \times \frac{6}{2} (x' - 20)$ ，

整理得 $y' = 2x' + 40$ 。

12. 12

出處：選修數學乙(上)〈積分〉

目標：能正確的瞭解函數與反導函數的關係，並正確求出反導函數

解析：利用反導函數公式，

$$\text{得 } F(x) = \frac{3}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 - x + C = x^3 + 2x^2 - x + C$$

(C 為任意常數)

$$\because F(1) = 0 \quad \therefore 1 + 2 - 1 + C = 0$$

解得 $C = -2$

$$\text{即 } F(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$\text{故 } F(2) = 8 + 8 - 2 - 2 = 12。$$

第貳部分、混合題或非選擇題

13. (1)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：利用窮舉法確立計數的分類情形

解析：依題意列式： $50x + 100y = 200$

$$\Rightarrow x + 2y = 4$$

$(x, y) = (4, 0), (2, 1), (0, 2)$ ，共 3 種

故選(1)。

14. 30 種，說明略

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：利用分類討論法解決組合問題

解析：我們分成以下 3 種情況來討論：

情況 1：4 個 50 元商品

四同有 3 種，

三同一異有 $3 \times 2 = 6$ 種，

二同二同有 $C_2^3 = 3$ 種，

二同二異有 $3 \times C_2^2 = 3$ 種

以上共有 15 種

情況 2：2 個 50 元 + 1 個 100 元

50 元商品組合選 2 個：二同有 3 種，二異有 $C_2^3 = 3$ 種

以上共有 6 種

100 元商品：有 2 種

兩者搭配數： $6 \times 2 = 12$ 種

情況 3：2 個 100 元商品

100 元商品組合選 2 個：二同有 2 種，二異有 1 種，

以上共有 3 種

故以上共有 $15 + 12 + 3 = 30$ 種搭配的組合方式。

◎評分原則

我們分成以下 3 種情況來討論：

情況 1：4 個 50 元商品

四同有 3 種，

三同一異有 $3 \times 2 = 6$ 種，

二同二同有 $C_2^3 = 3$ 種，

二同二異有 $3 \times C_2^2 = 3$ 種

以上共有 15 種 (2 分)

情況 2：2 個 50 元 + 1 個 100 元

50 元商品組合選 2 個：二同有 3 種，二異有 $C_2^3 = 3$ 種

以上共有 6 種

100 元商品：有 2 種

兩者搭配數： $6 \times 2 = 12$ 種 (2 分)

情況 3：2 個 100 元商品

100 元商品組合選 2 個：二同有 2 種，二異有 1 種，以上

共有 3 種 (2 分)

故以上共有 $15 + 12 + 3 = 30$ 種搭配的組合方式。 (1 分)

15. $\frac{7}{30}$

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：古典機率的定義與運算

解析：承 14. 題，由以上討論，所有物品都是不同

情況 1：沒有

情況 2：有 $3 \times 2 = 6$ 種

情況 3：有 1 種

故其機率為 $\frac{7}{30}$ 。

◎評分原則

承 14. 題，由以上討論，所有物品都是不同

情況 1：沒有

情況 2：有 $3 \times 2 = 6$ 種

情況 3：有 1 種

故其機率為 $\frac{7}{30}$ 。(4 分)

16. (1)(3)

出處：選修數學乙(上)〈微分〉

目標：多項式函數的極限判定與圖形特徵分析

解析：(1) $\bigcirc$ ： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{f(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 3n + 2}{(n+1)^3 - 3(n+1) + 2}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 3n + 2}{n^3 + 3n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{1 + \frac{3}{n}} = 1$$

(2) $\times$ ：因 $f(x)$ 為連續函數，

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} f(x+1)} = \frac{f(1)}{f(2)} = \frac{0}{4} = 0$$

(3) $\bigcirc$ ： $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$ ，又 $f'(x) = 3x^2 - 3$ ，
得 $f'(1) = 0 < 1$

(4) $\times$ ： $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$ ，當 $-1 < x < 1$ 時，
 $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 為嚴格遞減函數

(5) $\times$ ： $f''(x) = 6x$ ，當 $-1 < x < 0$ 時， $f''(x) = 6x < 0$ ，
 $f(x)$ 函數圖形凹口向下；
當 $0 < x < 1$ 時， $f''(x) = 6x > 0$ ， $f(x)$ 函數圖形凹口向上

故選(1)(3)。

17. (0, 2)， $y = -3x + 2$

出處：選修數學乙(上)〈微分〉

目標：利用二階導數求反曲點與切線方程式

解析： $f'(x) = 3x^2 - 3$ ， $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 6x = 0$ 時， $x = 0$ ，

故反曲點坐標為 (0, 2)

$f'(0) = -3$ ，得以反曲點為切點的直線方程式為

$y - 2 = -3(x - 0)$ ，

整理得 $y = -3x + 2$ 。

◎評分原則

$f'(x) = 3x^2 - 3$ ， $f''(x) = 6x$ (1 分)

$f''(x) = 6x = 0$ 時， $x = 0$ ，

故反曲點坐標為 (0, 2) (1 分)

$f'(0) = -3$ ，得以反曲點為切點的直線方程式為

$y - 2 = -3(x - 0)$ ，

整理得 $y = -3x + 2$ 。(2 分)

18. 圖略

出處：選修數學乙(上)〈微分〉

目標：三次多項式函數圖形的繪圖

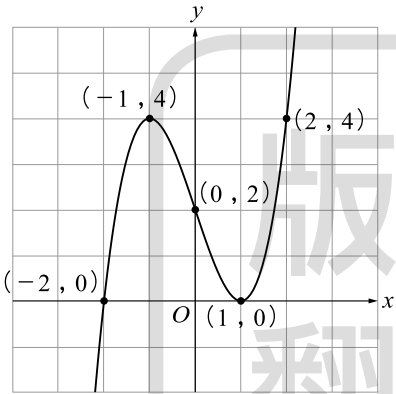
解析： $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ ， $f''(x)=6x$

接著，將 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的正、負列表，再綜合遞增、遞減及凹向的資訊，得出各區間內圖形的大略形狀，列表如下：

x	-1			0	1		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	 4 			2	 0 		

表中的曲線為各區間內圖形的大略形狀，那是綜合遞增、遞減及凹向的資訊得到的

最後，在坐標平面上，點出 $(-1, 4)$ ， $(1, 0)$ 兩點與反曲點 $(0, 2)$ ，及描出一些其他點，如 $(-2, 0)$ ， $(2, 4)$ 等，再以平滑曲線連接，可得 $y=x^3-3x+2$ 的近似圖形。



◎評分原則

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ ， $f''(x)=6x$ (1分)

接著，將 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的正、負列表，再綜合遞增、遞減及凹向的資訊，得出各區間內圖形的大略形狀，列表如下： (2分)

x	-1		0		1		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		4		2		0	

表中的曲線為各區間內圖形的大略形狀，那是綜合遞增、遞減及凹向的資訊得到的

最後，在坐標平面上，點出 $(-1, 4)$ ， $(1, 0)$ 兩點與反曲點 $(0, 2)$ ，及描出一些其他點，如 $(-2, 0)$ ， $(2, 4)$ 等，再以平滑曲線連接，可得 $y=x^3-3x+2$ 的近似圖形。

