北北基高級中等學校
114學年度分科測驗聯合模擬考試

數學乙考科B卷參考答案暨詳解

翰林出版事業股份有限公司

99362532-34

114-E5

數學甲考科 B 卷詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(4)	(3)	(1)	(5)	(4)	(1)(5)
8.	9.					
(1)(2)(5)	(1)					

第壹部分、選擇（填）題

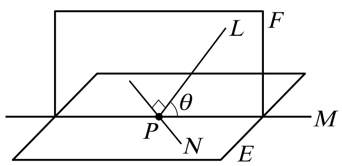
一、單選題

1. (2)

出處：第四冊 A〈空間向量〉、
第四冊 B〈空間概念與空間坐標系〉

目標：空間概念

解析：如下圖，



在平面 E 上，過 P 點且與 L 垂直的直線 N 即為所求
∴只有一條，故選(2)。

2. (4)

出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊 A〈指數與對數函數〉、
第三冊 B〈按比例成長模型〉

目標：能正確的列出直線方程式、能進行簡單的對數運算

解析：先求出直線的方程式

斜率 $m=\dfrac{\log 6-\log 3}{6-3}=\dfrac{\log 2}{3}$

∴直線的方程式為 $y-\log 3=\dfrac{\log 2}{3}(x-3)$

將 $x=12$ 代入，得 $y-\log 3=\dfrac{\log 2}{3}(12-3)=3\log 2$

$\Rightarrow y=3\log 2+\log 3=\log 2^3+\log 3=\log(8\times 3)=\log 24$

故選(4)。

〈另解〉

依相似三角形對應邊成比例

直線斜率 $m=\dfrac{\log 6-\log 3}{6-3}=\dfrac{y-\log 6}{12-6}$

$\Rightarrow \dfrac{\log 2}{3}=\dfrac{y-\log 6}{6}\Rightarrow y-\log 6=2\log 2=\log 4$

$\Rightarrow y=\log 4+\log 6=\log 24$，故選(4)。

3. (3)

出處：第四冊 A〈機率〉、第四冊 B〈機率〉、
第四冊 A〈矩陣〉、第四冊 B〈矩陣與資料表格〉

目標：能正確的處理矩陣運算、能瞭解條件機率的定義及運算

解析：$A+2I=aI+b\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A=(a-2)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-2 & b\\ b & a-2\end{bmatrix}$

$\because A^{-1}$ 存在　$\therefore (a-2)^2-b^2\neq 0$

① $a=1$ 時，$b=2$，3，4，5，6

② $a=2$ 時，$b=1$，2，3，4，5，6

③ $a=3$ 時，$b=2$，3，4，5，6

④ $a=4$ 時，$b=1$，3，4，5，6

⑤ $a=5$ 時，$b=1$，2，4，5，6

⑥ $a=6$ 時，$b=1$，2，3，5，6

以上共 31 種

兩次點數和為偶數的情形：

① $a=1$ 時，$b=3$，5

② $a=2$ 時，$b=2$，4，6

③ $a=3$ 時，$b=3$，5

④ $a=4$ 時，$b=4$，6

⑤ $a=5$ 時，$b=1$，5

⑥ $a=6$ 時，$b=2$，6

以上共 13 種

樣本空間數 $n(S)=36$，所求條件機率為 $\dfrac{\frac{13}{36}}{\frac{31}{36}}=\dfrac{13}{31}$

故選(3)。

4. (1)

出處：選修數學乙(下)〈線性規劃〉

目標：能正確的處理線性規劃的問題

解析：令 $ax+2y=k$

∵以 A 點代入 $ax+2y$ 所得的值最大

∴當直線 $ax+2y=k$ 向右方移動時，其值將愈來愈小

因此 $a<0$，故選(1)。

5. (5)

出處：選修數學乙(下)〈線性規劃〉

目標：能正確的處理平面上的面積問題、能正確的處理平面上的二元一次不等式問題

解析：直線 BC 的斜率為 $\dfrac{k-3}{3-k}=-1$

$\overline{BC}=\sqrt{(3-k)^2+(k-3)^2}=\sqrt{2}\,|k-3|$

直線 BC 的方程式為

$x+y=3+k\Rightarrow x+y-k-3=0$

點 A 到直線 BC 的距離為 $\dfrac{|-1+1-k-3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|k+3|}{\sqrt{2}}$

$\triangle ABC$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\,|k-3|\times\dfrac{|k+3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{7}{2}$

$\Rightarrow |k^2-9|=7\Rightarrow k^2=16$ 或 $2\Rightarrow k=\pm 4$ 或 $\pm\sqrt{2}$

若可行解區域為 n 邊形，線性規劃的最大、最小值會發生在邊界或頂點

$A(-1,1)$ 代入 $x+y$ 得值為 0

$B(3,k)$，$C(k,3)$ 滿足 $x+y=k+3$

故 $k=4$ 代入可得 $x+y=k+3=7$ 為最大值

故選(5)。

6. (4)

出處：選修數學乙(下)〈分布與統計〉

目標：能正確的處理隨機變數的期望值與標準差

解析：設隨機變數 X 所有可能的價值為 $3k$，$2k$，k(萬元)，分別對應到取到金幣，銀幣，銅幣的情形

而各取值發生的機率分別為 $\dfrac{1}{6}$、$\dfrac{2}{6}$、$\dfrac{3}{6}$，

故 X 的機率分布表如下：

X	$3k$ (金幣)	$2k$ (銀幣)	k (銅幣)
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

X 的期望值 $E(X)=3k\times\frac{1}{6}+2k\times\frac{2}{6}+k\times\frac{3}{6}=10$，

得 $k=6$ (萬元)

X 的變異數

$\mathrm{Var}(X)=(18-10)^2\times\frac{1}{6}+(12-10)^2\times\frac{2}{6}+(6-10)^2\times\frac{3}{6}$

$=\frac{120}{6}=20$

可得 X 的標準差 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ (萬元)

故選(4)。

二、多選題

7. (1)(5)

出處：第二冊〈數列與級數〉、第二冊〈排列組合與機率〉

目標：數列、級數與集合的概念與運算

解析：(1) ○：等差數列中，$a_1+a_6=a_2+a_5$

$=a_3+a_4=2a_1+5d$，

故 $a_1+a_2+a_5+a_6=2(a_3+a_4)$

(2) ╳：等比數列中，

$(a_1+a_4)-(a_2+a_3)=a_1(1+r^3-r-r^2)$

$=a_1(r-1)^2(r+1)$ 的正負值由 $(r+1)$ 決定

(3) ╳：$n(A)=1000$，$n(A\cap B)=\{1^6, 2^6, \cdots\cdots, 10^6\}$

則 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=1000-10=990$

(4) ╳：$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots\cdots+99^2-100^2$

$=(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+(5^2-6^2)+\cdots\cdots$

$+(99^2-100^2)$

$=-3-7-11-\cdots\cdots-199$

$=-(3+7+11+\cdots\cdots+199)$

(5) ○：$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2$

$-(2n)^2+(2n+1)^2$

$=-(3+7+11+\cdots\cdots+(4n-1))+(2n+1)^2$

$=-\frac{n(3+(4n-1))}{2}+(2n+1)^2$

$=2n^2+3n+1=(n+1)(2n+1)>0$

〈另解〉

共有 $2n+1$ 項

原式化為

$1^2+(-2^2+3^2)+(-4^2+5^2)+\cdots\cdots$

$+(-(2n)^2+(2n+1)^2)$

$=1+5+9+\cdots\cdots+(4n+1)>0$

故選(1)(5)。

8. (1)(2)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉、第一冊〈直線與圓〉

目標：能正確的處理三次函數、圓的相關問題

解析：(1) ○：$y=(x-1)^3+x=(x-1)^3+(x-1)+1$ 符合三次函數的標準式 $y=a(x-h)^3+p(x-h)+k$

故圖形通過 $(1,1)$，且 $(1,1)$ 為其圖形的對稱中心

(2) ○：承(1)　∵ $a=1$，$p=1$，$ap>0$

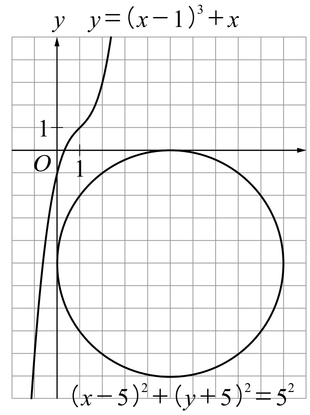
∴圖形為嚴格遞增，故只會和 x 軸相交於一點

(3) ╳：$x^2+y^2-10x+10y+25=0$，整理得

$(x-5)^2+(y+5)^2=5^2$

得圖形為一圓，圓心 $(5,-5)$，半徑為 5，

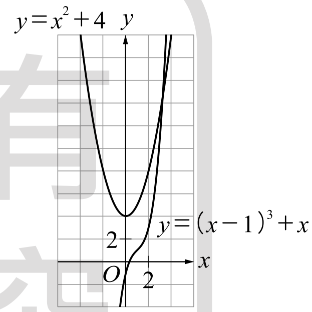
如下圖



∵三次函數在第四象限只會經過 $(0,0)$，$(1,0)$，$(0,-1)$，$(1,-1)$ 所形成的正方形區域，而圓不會經過此區域

∴兩圖形無交點

(4) ╳：如下圖



對任意一個實數 x 而言，將兩個 y 值相減得

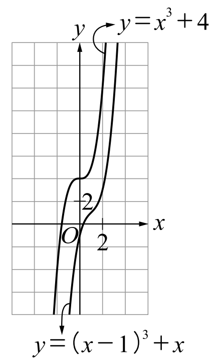
$(x^2+4)-((x-1)^3+x)=(x^2+4)-(x^3-3x^2+4x-1)$

$=-x^3+4x^2-4x+5$ 為三次函數

x 值很大時其值為負值，x 值很小時其值為正值

故 $y=x^2+4$ 的圖形不一定恆在 $y=(x-1)^3+x$ 的圖形的上方

(5) ○：如下圖，



對任意一個實數 x 而言，將兩個 y 值相減得

$(x^3+4)-((x-1)^3+x)=(x^3+4)-(x^3-3x^2+4x-1)$

$=3x^2-4x+5$ 為二次函數，其開口朝上且

$D<0$，其值恆正

故 $y=x^3+4$ 的圖形恆在 $y=(x-1)^3+x$ 的圖形的上方

故選(1)(2)(5)。

9. (1)

出處：選修數學乙(下)〈複數平面〉

目標：能正確的處理複數運算、能瞭解複數平面的定義及運算

解析：$(z-1)\cdot(\bar{z}-1)=z\cdot\bar{z}-z-\bar{z}+1=a^2+b^2-2a+1$

$=(a-1)^2+b^2>0$ 為一大於 0 的實數

故選(1)。

三、選填題

10. $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

出處：第三冊 A〈平面向量〉、

第三冊 B〈平面向量與應用〉

目標：能正確的處理平面中的向量運算

解析：依題意 $A(3,4)$，與 $\overrightarrow{OA}$ 垂直的向量為 $t(4,-3)$，

其中 t 為實數

因為是向右轉 10 單位，取 $t=2$，

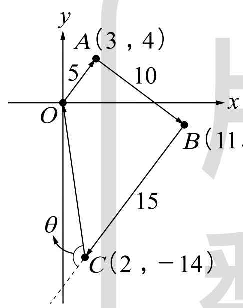
得 $\overrightarrow{AB}=(8,-6)\Rightarrow B(11,-2)$

與 $\overrightarrow{AB}$ 垂直的向量為 $s(3,4)$

因為是向右轉 15 單位，取 $s=-3$，

得 $\overrightarrow{BC}=(-9,-12)\Rightarrow C(2,-14)$，

這時他想回到 $O(0,0)$，得 $\overrightarrow{CO}=(-2,14)$



利用向量的內積公式 $\overrightarrow{BC}$ 與 $\overrightarrow{CO}$ 的夾角 θ，

$\cos\theta=\dfrac{(-9,-12)\cdot(-2,14)}{|(-9,-12)||(-2,14)|}$

$=\dfrac{-150}{15\times\sqrt{200}}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ 。

〈另解〉

$\overline{OB}=5\sqrt{5}$ ，$\overline{BC}=15$，$\overline{CO}=\sqrt{200}$ ，

可利用餘弦定理求出

$\cos\angle OCB=\dfrac{(\sqrt{200})^2+15^2-(5\sqrt{5})^2}{2\times\sqrt{200}\times15}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

故 $\cos\theta=\cos(180^\circ-\angle OCB)=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ 。

11. $y'=2x'+40$

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：能正確的處理相關係數、最適直線等問題

解析：設 xy 的相關係數 $r_{xy}=r$

由題意可知，最適直線方程式的斜率

$\dfrac{2}{9}=r\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=r\times\dfrac{2}{6}$

解得 $r=\dfrac{2}{3}$

將其數值前後順序互換後，相關係數依然不變，

$r_{x'y'}=r_{xy}=r=\dfrac{2}{3}$

故得到新的最適直線方程式為 $y'-80=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{6}{2}(x'-20)$，

整理得 $y'=2x'+40$。

12. $\dfrac{17}{81}$

出處：選修數學乙(下)〈分布與統計〉

目標：能正確的處理二項分布的運算

解析：被捕獲的機率為 $\dfrac{2}{3}$ ，沒被捕獲的機率為 $\dfrac{1}{3}$

X＝沒被捕獲的次數， $X\sim B\left(n=5，p=\dfrac{1}{3}\right)$

$X=5$ 代表沒被捕獲的有 5 次

$X=4$ 代表沒被捕獲的有 4 次，被捕獲的有 1 次，因此可以努力掙脫而成功返航

$X=3$ 代表沒被捕獲的有 3 次，被捕獲的有 2 次，因此可以努力掙脫而成功返航

$P(X\geq3)=P(X=5)+P(X=4)+P(X=3)$

$=\left(\dfrac{1}{3}\right)^5+5\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)+10\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{17}{81}$ 。

第貳部分、混合題或非選擇題

13. (1)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：利用窮舉法確立計數的分類情形

解析：依題意列式：$50x+100y=200\Rightarrow x+2y=4$

$(x,y)=(4,0)$，$(2,1)$，$(0,2)$，共 3 種，故選(1)。

14. 30 種，說明略

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：利用分類討論法解決組合問題

解析：我們分成以下 3 種情況來討論：

情況 1：4 個 50 元商品

四同有 3 種，

三同一異有 $3\times2=6$ 種，

二同二同有 $C_2^3=3$ 種，

二同二異有 $3\times C_2^2=3$ 種

以上共有 15 種

情況 2：2 個 50 元＋1 個 100 元

50 元商品組合選 2 個：二同有 3 種，二異有 $C_2^3=3$ 種

以上共有 6 種

100 元商品：有 2 種

兩者搭配數：$6\times2=12$ 種

情況 3：2 個 100 元商品

100 元商品組合選 2 個：二同有 2 種，二異有 1 種，

以上共有 3 種

故以上共有 15＋12＋3＝30 種搭配的組合方式。

◎**評分原則**

我們分成以下 3 種情況來討論： 情況 1：4 個 50 元商品 四同有 3 種， 三同一異有 $3\times2=6$ 種， 二同二同有 $C_2^3=3$ 種， 二同二異有 $3\times C_2^2=3$ 種 以上共有 15 種　(2 分)

情況 2：2 個 50 元＋1 個 100 元
50 元商品組合選 2 個：二同有 3 種，二異有 $C_2^3=3$ 種
以上共有 6 種
100 元商品：有 2 種
兩者搭配數：$6\times 2=12$ 種　(2 分)
情況 3：2 個 100 元商品
100 元商品組合選 2 個：二同有 2 種，二異有 1 種，以上共有 3 種　(2 分)
故以上共有 $15+12+3=30$ 種搭配的組合方式。　(1 分)

15. $\dfrac{7}{30}$

出處：第二冊〈排列組合與機率〉
目標：古典機率的定義與運算
解析：承 14. 題，由以上討論，所有物品都是不同
情況 1：沒有
情況 2：有 $3\times 2=6$ 種
情況 3：有 1 種
故其機率為 $\dfrac{7}{30}$。

◎評分原則

承 14. 題，由以上討論，所有物品都是不同
情況 1：沒有
情況 2：有 $3\times 2=6$ 種
情況 3：有 1 種
故其機率為 $\dfrac{7}{30}$。　(4 分)

16. (1)

出處：選修數學乙(下)〈複數平面〉
目標：判別多項式方程式的根與圖形交點之關係
解析：$\because f(x)$ 為實係數四次多項式，根據代數基本定理，四次方程式恰有四個複數根
又 i，$1-i$ 為方程式 $f(x)=0$ 的根
$\therefore$由實係數方程式虛根成對定理，$f(x)=0$ 有四共軛虛根，沒有實根
因此，$y=f(x)$的圖形與 x 軸會沒有交點
故選(1)。

17. $f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+2$

出處：選修數學乙(下)〈複數平面〉
目標：利用虛根成對定理求多項式函數
解析：$\because i$ 為 $f(x)=0$ 的一個根
由虛根成對定理可知，$-i$ 也是 $f(x)=0$ 的一個根
$\therefore (x-i)(x-(-i))=x^2+1$ 是 $f(x)$的二次因式
同理　$\because 1-i$ 為 $f(x)=0$ 的一個根
由虛根成對定理可知，$1+i$ 也是 $f(x)=0$ 的一個根
$\therefore (x-(1-i))(x-(1+i))=x^2-2x+2$ 也是 $f(x)$ 的二次因式
又最高次項係數 (首項係數) 為 1
故 $f(x)=(x^2+1)(x^2-2x+2)=x^4-2x^3+3x^2-2x+2$。

◎評分原則

$\because i$ 為 $f(x)=0$ 的一個根
由虛根成對定理可知，$-i$ 也是 $f(x)=0$ 的一個根
$\therefore (x-i)(x-(-i))=x^2+1$ 是 $f(x)$的二次因式　(2 分)
同理　$\because 1-i$ 為 $f(x)=0$ 的一個根
由虛根成對定理可知，$1+i$ 也是 $f(x)=0$ 的一個根
$\therefore (x-(1-i))(x-(1+i))=x^2-2x+2$ 也是 $f(x)$ 的二次因式 (2 分)
又最高次項係數 (首項係數) 為 1
故 $f(x)=(x^2+1)(x^2-2x+2)=x^4-2x^3+3x^2-2x+2$。(2 分)

18. $-4+12i$

出處：選修數學乙(下)〈複數平面〉
目標：利用除法原理或降次技巧求多項式函數值
解析：$x=2+i\Rightarrow x-2=i\Rightarrow (x-2)^2=-1\Rightarrow x^2-4x+5=0$
$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+2$
$=(x^2-4x+5)(x^2+2x+6)+12x-28$
$f(2+i)=0+12(2+i)-28=-4+12i$。
〈另解 1〉
$x=2+i\Rightarrow x^2=(2+i)^2=4+4i-1=3+4i$
$x^3=(2+i)(3+4i)=6+11i-4=2+11i$
$x^4=(x^2)^2=(3+4i)^2=9+24i-16=-7+24i$
所求 $f(2+i)=(2+i)^4-2(2+i)^3+3(2+i)^2-2(2+i)+2$
$=(-7+24i)-2(2+11i)+3(3+4i)$
$-2(2+i)+2$
$=-4+12i$。
〈另解 2〉
令 $z=2+i\Rightarrow z-2=i\Rightarrow (z-2)^2=-1\Rightarrow z^2-4z+5=0$
將 $z^2=4z-5$ 代入，
可得 $z^2+1=4z-4$，$z^2-2z+2=2z-3$
$f(z)=(z^2+1)(z^2-2z+2)=(4z-4)(2z-3)$
$=4(2z^2-5z+3)=4(3z-7)$
$f(2+i)=4(3(2+i)-7)=4(-1+3i)=-4+12i$。

◎評分原則

$x=2+i\Rightarrow x-2=i\Rightarrow (x-2)^2=-1\Rightarrow x^2-4x+5=0$ (1 分)
$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+2$
$=(x^2-4x+5)(x^2+2x+6)+12x-28$　(2 分)
$f(2+i)=0+12(2+i)-28=-4+12i$。　(1 分)
〈另解 1〉
$x=2+i\Rightarrow x^2=(2+i)^2=4+4i-1=3+4i$　(1 分)
$x^3=(2+i)(3+4i)=6+11i-4=2+11i$　(1 分)
$x^4=(x^2)^2=(3+4i)^2=9+24i-16=-7+24i$　(1 分)
所求 $f(2+i)=(2+i)^4-2(2+i)^3+3(2+i)^2-2(2+i)+2$
$=(-7+24i)-2(2+11i)+3(3+4i)-2(2+i)+2$
$=-4+12i$。　(1 分)
〈另解 2〉
令 $z=2+i\Rightarrow z-2=i\Rightarrow (z-2)^2=-1\Rightarrow z^2-4z+5=0$ (1 分)
將 $z^2=4z-5$ 代入，
可得 $z^2+1=4z-4$，$z^2-2z+2=2z-3$　(1 分)
$f(z)=(z^2+1)(z^2-2z+2)=(4z-4)(2z-3)$
$=4(2z^2-5z+3)=4(3z-7)$　(1 分)
$f(2+i)=4(3(2+i)-7)=4(-1+3i)=-4+12i$。　(1 分)