北北基高級中等學校

114 學年度分科測驗聯合模擬考試

數學甲考科A卷參考答案暨詳解

翰林出版事業股份有限公司

99362517-34

114-E5

數學甲考科 A 卷詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(5)	(2)	(4)	(2)(5)	(1)(2)(4)(5)	(1)(2)(5)	(1)(2)(3)
8.						
(2)(5)						

第壹部分、選擇（填）題

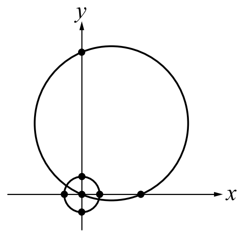
一、單選題

1. (5)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：會在坐標平面上畫圓，並使用排列組合及加法原理

解析：依題意作圖如下



觀察發現這七個點中有四點共線 (在 x 軸上)、另四點也共線 (在 y 軸上)

直接算可得 11 條直線，故選(5)。

〔另解〕

七點任選兩點再扣除重複的部分

共有 $C^7_2-(C^4_2-1)-(C^4_2-1)=11$ 條，故選(5)。

2. (2)

出處：第二冊〈數據分析〉、第二冊〈排列組合與機率〉、第四冊〈機率〉

目標：了解中位數的意義，並會使用加法原理、組合公式及計算條件機率

解析：由於甲的中位數比乙的中位數小 2，故至少有 9 個數比乙組的中位數小，因此乙組的中位數至少為 10 且有 9 個數比甲組的中位數大，

甲組的中位數至多為 9

可得乙組的中位數為 10 時，甲組的中位數為 8，

乙組的中位數為 11 時，甲組的中位數為 9

因此分法有 $C^7_4C^8_4+C^8_4C^7_4$ 種

甲組的中位數比乙組的中位數小 2 且 1、2、3、4 都在甲組的分法有 $C^8_4+C^7_4$ 種

因此所求為 $\dfrac{C^8_4+C^7_4}{C^7_4C^8_4+C^8_4C^7_4}=\dfrac{70+35}{35\times70+70\times35}=\dfrac{3}{140}$

故選(2)。

3. (4)

出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊〈三角函數〉

目標：了解圓上弧角關係及直線的斜率

解析：令 O 為原點，菱形中心 $E(x\,,y)$，

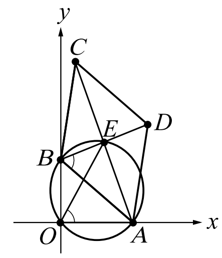
已知菱形的對角線互相垂直平分，

則 $\angle AOB=\angle AEB=\dfrac{\pi}{2}$

因此 O、A、E、B 四點共圓，

$\therefore \angle EOA=\angle EBA=\dfrac{1}{2}\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$，

故 $\dfrac{y}{x}=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$



$\therefore$菱形中心 E 皆在直線 $y=\sqrt{3}x$ 上

故選(4)。

二、多選題

4. (2)(5)

出處：第二冊〈數列與級數〉、選修數學甲(上)〈極限與函數〉

目標：判斷無窮數列或級數的收斂或發散

解析：$\langle a_n\rangle=1，0，-1，0，1，0，-1，0$，……每連續 4 個一次循環

$\langle b_n\rangle=0，-1，0，1，0，-1，0，1$，……每連續 4 個一次循環

(1)╳：數列 $\langle a_n\rangle$ 無法收斂至一個實數

(2)○：$\because |b_n|\le 1 \quad \therefore -\dfrac{1}{n}\le\dfrac{b_n}{n}\le\dfrac{1}{n}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

由夾擠定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{n}=0$

(3)╳：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 無法收斂至一個實數

(4)╳：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 無法收斂至一個實數

(5)○：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}0=0$

故選(2)(5)。

5. (1)(2)(4)(5)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：了解有理數的封閉性，並會使用線性組合

解析：(1)○：a^2+a 為有理數，因此 a^2+a-1 為有理數

(2)○：$\because a^3+2a^2$、a^2+a 皆為有理數

$\therefore (a^3+2a^2)-(a^2+a)=a^3+a^2-a$ 為有理數

(3)╳：承(2)，$a^3+a^2-a=a(a^2+a-1)$

若 $a^2+a-1\ne0$，則 $a=\dfrac{a^3+a^2-a}{a^2+a-1}$ 為有理數，

矛盾

因此 $a^2+a-1=0$

(4)○：承(3)，$a^2=1-a$，

$a^3=a-a^2=a-(1-a)=2a-1$

(5)○：$a^4=a^2-a^3=2-3a$，$a^5=a^3-a^4=5a-3$，

$a^6=a^4-a^5=5-8a$，……

(觀察係數剛好是費波那契數列的兩項)

可得 $a^{12}=89-144a$，因此 $n=144$

〔另解〕

$a^{12}=(a^6)^2=(5-8a)^2=64a^2-80a+25$

$=64(a^2+a-1)-144a+89=89-144a$

故 $n=144$

故選(1)(2)(4)(5)。

6. (1)(2)(5)

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：能理解指數律及對數定義

解析：由 $2^{x-y}=B$ 可得 $\dfrac{2^x}{2^y}=B$，即 $2^x=B\cdot 2^y$

代入 $2^x-2^y=A$ 可得 $B\cdot 2^y-2^y=A$

若方程組有實數解，則 B 必大於 0

當 $B=1$ 時，$A=0$，當 $B\neq 1$ 時，$2^y=\dfrac{A}{B-1}>0$

(1) ○

(2) ○：若方程組有實數解，當 $A<0$ 時，$0<B<1$

(3) ╳：若 $B<1$，則方程組無實數解

(4) ╳：若 $B=1$ 但 $A\neq 0$ 時，方程組無解

(5) ○：$\log A+\log(B-1)>0$ 即 $\begin{cases}A>0\\ B-1>0\\ A(B-1)>1\end{cases}$

因此方程組有唯一解，

此時 $2^y=\dfrac{A}{B-1}$，$2^x=A+\dfrac{A}{B-1}$

故選(1)(2)(5)。

7. (1)(2)(3)

出處：選修數學甲(上)〈微分〉

目標：利用微分來畫出三次函數圖形

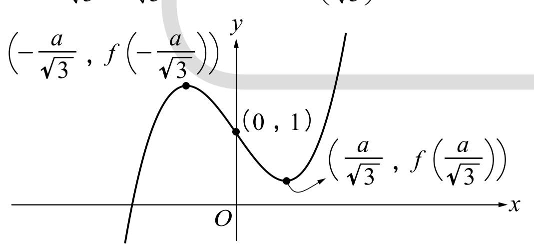
解析：$f(x)=x(x+a)(x-a)+1=x^3-a^2x+1$，對稱中心為 $(1,0)$

分段討論：

① $a=0$ 時，$f(x)=x^3+1=0$ 必恰有一個實根

② $a>0$ 時，$f'(x)=3x^2-a^2=0$ 之解 $x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 為極值發生點

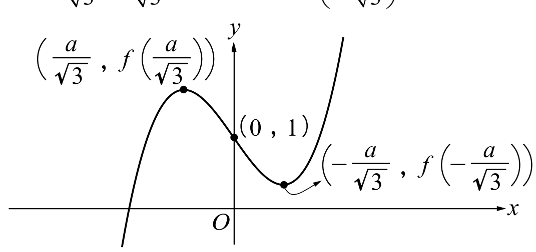
$\because -\dfrac{a}{\sqrt{3}}<\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ $\therefore$ 極小值 $f\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)>0$



即 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^3-a^2\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)+1>0\Rightarrow a^3<\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

③ $a<0$ 時

$\because -\dfrac{a}{\sqrt{3}}>\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ $\therefore$ 極小值 $f\left(-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)>0$



即 $\left(-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^3-a^2\left(-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)+1>0$

$\Rightarrow a^3>-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

由①、②、③知 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}<a^3<\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，故選(1)(2)(3)。

8. (2)(5)

出處：第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：能判斷空間中直線與平面，平面與平面關係

解析：直線 L 的方向向量為 $(a,2,3)$，

平面 E_1 的法向量為 $(1,2,0)$，

平面 E_2 的法向量為 $(1,c,-2)$

(1) ╳：$\because (a,2,3)$ 和 $(1,2,0)$ 必不平行

$\therefore$ 直線 L 和平面 E_1 不垂直

(2) ○：$(a,2,3)\cdot(1,2,0)=0$ 且

$(a,2,3)\cdot(1,c,-2)=0$

可得 $a=-4$，$c=5$

將 L 上的點 $(1,-1,5)$ 代入 E_1，

只要 $b\neq -1$，則直線 L 和平面 E_1 平行

點 $(1,-1,5)$ 代入 E_2，發現不合，因此直線 L 必和平面 E_2 平行

(3) ╳：承(2)，直線 L 不可能在平面 E_2 上

(4) ╳：承(2)，當 $a=-4$，$b=-1$ 時，直線 L 在平面 E_1 上

但此時 $(a,2,3)\nparallel(1,c,-2)$，因此直線 L 不和平面 E_2 垂直

(5) ○：承(2)，當 $a=c=1$ 時，直線 L 和平面 E_1、E_2 均相交，故選(2)(5)。

三、選填題

9. $k\geq 2$

出處：第一冊〈多項式函數〉、第三冊〈三角函數〉

目標：利用二次函數解不等式

解析：原式即為 $\cos^2 x-\cos x\leq k$ 對於任意實數恆成立

令 $t=\cos x$，$-1\leq t\leq 1$

可將 $\cos^2 x-\cos x$ 化為 $f(t)=t^2-t=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

其最大值為 $f(-1)=(-1)^2-(-1)=2$

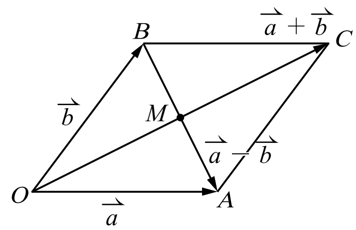
故 $k\geq 2$。

10. $100\sqrt{3}$

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：平面向量的運算

解析：設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 所張成的平行四邊形的頂點為 O，A，B，C，其中 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}$



根據平行四邊形法，兩條對角線的向量分別為

$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$

設兩對角線的交點為 M，

則對角線長分別為 $2|\overrightarrow{OM}|$，$2|\overrightarrow{MA}|$

故 $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=2|\overrightarrow{OM}|+2|\overrightarrow{MA}|=40$

可得 $|\overrightarrow{OM}|+|\overrightarrow{MA}|=20$

令 $|\overrightarrow{OM}|=\alpha$，$|\overrightarrow{MA}|=20-\alpha$，

又 $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{6^2+8^2}=10$

∴△OMA 周長為 30，半周長為 15

故△OMA 面積為

$\sqrt{15(15-10)(15-\alpha)(15-(20-\alpha))}$

$=5\sqrt{3}\times\sqrt{-\alpha^2+20\alpha-75}$

$=5\sqrt{3}\times\sqrt{-(\alpha-10)^2+25}\le 25\sqrt{3}$

∴ $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 所張成的平行四邊形面積＝4△OMA 面積 $\le 100\sqrt{3}$

故所求最大值為 $100\sqrt{3}$。

11. $\frac{15\sqrt{2}}{4}\pi$

出處：第三冊〈三角函數〉、第四冊〈空間向量〉

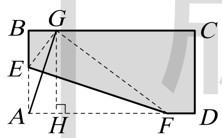
目標：能理解空間圖形變化及弧長的求法

解析：A 點軌跡的路徑長恰為一個半圓，

只要求出直徑 $\overline{AG}$ 長即可

①令 $\overline{AF}=\overline{GF}=x$ 公分，則 $x\sin(2\angle EFA)=10$，

可得 $x=\frac{10}{\sin(2\angle EFA)}=\frac{10}{2\times\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{45\sqrt{2}}{4}$



因此 $\overline{AG}=2\times(G$ 到 $\overline{EF}$ 的距離$)$

$=2\times\frac{45\sqrt{2}}{4}\times\sin\angle EFA$

$=2\times\frac{45\sqrt{2}}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{15\sqrt{2}}{2}$

②∵ $\overline{AG}\perp\overline{EF}$ ∴ $\angle GAB=\angle EFA$

$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}}=\cos\angle GAB=\cos\angle EFA$

即 $\frac{10}{\overline{AG}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，得 $\overline{AG}=\frac{15\sqrt{2}}{2}$

故路徑長為 $\frac{1}{2}\times\pi\times\frac{15\sqrt{2}}{2}=\frac{15\sqrt{2}}{4}\pi$。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. $a_2=\frac{1}{2}$，$a_3=\frac{3}{5}$，$a_4=\frac{2}{3}$

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：能列出遞迴數列的前四項

解析：$\because \frac{n+1}{a_{n+1}}=\frac{n+a_n}{a_n}=\frac{n}{a_n}+1$ 且 $a_1=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{2}{a_2}=\frac{1}{a_1}+1=\frac{1}{\frac{1}{3}}+1=4$

$\therefore a_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$\frac{3}{a_3}=\frac{2}{\frac{1}{2}}+1=5$ $\therefore a_3=\frac{3}{5}$

$\frac{4}{a_4}=\frac{3}{\frac{3}{5}}+1=6$ $\therefore a_4=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

故 $a_2=\frac{1}{2}$，$a_3=\frac{3}{5}$，$a_4=\frac{2}{3}$。

◎評分原則

$\because \frac{n+1}{a_{n+1}}=\frac{n+a_n}{a_n}=\frac{n}{a_n}+1$ 且 $a_1=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{2}{a_2}=\frac{1}{a_1}+1=\frac{1}{\frac{1}{3}}+1=4$

$\therefore a_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ (1 分)

$\frac{3}{a_3}=\frac{2}{\frac{1}{2}}+1=5$ $\therefore a_3=\frac{3}{5}$ (1 分)

$\frac{4}{a_4}=\frac{3}{\frac{3}{5}}+1=6$ $\therefore a_4=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ (1 分)

故 $a_2=\frac{1}{2}$，$a_3=\frac{3}{5}$，$a_4=\frac{2}{3}$。

13. $a_n=\frac{n}{n+2}$，證明略

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：能化簡遞迴數列的一般式，並用數學歸納法證明

解析：由 12. 可推測 $a_n=\frac{n}{n+2}$，n 為正整數

①當 $n=1$，$a_1=\frac{1}{3}$ 代入成立

②假設 $n=k$ 成立，即 $a_k=\frac{k}{k+2}$

代入 $\frac{k+1}{a_{k+1}}=\frac{k+a_k}{a_k}=\frac{k}{a_k}+1=\frac{k}{\frac{k}{k+2}}+1=k+3$

故 $a_{k+1}=\frac{k+1}{k+3}$ 也成立

由數學歸納法得知，對於所有正整數 n，$a_n=\frac{n}{n+2}$ 恆成立。

◎評分原則

由 12. 可推測 $a_n=\frac{n}{n+2}$，n 為正整數 (1 分)

①當 $n=1$，$a_1=\frac{1}{3}$ 代入成立 (1 分)

②假設 $n=k$ 成立，即 $a_k=\frac{k}{k+2}$ (1 分)

代入 $\frac{k+1}{a_{k+1}}=\frac{k+a_k}{a_k}=\frac{k}{a_k}+1=\frac{k}{\frac{k}{k+2}}+1=k+3$ (2 分)

故 $a_{k+1}=\frac{k+1}{k+3}$ 也成立

由數學歸納法得知，對於所有正整數 n，$a_n=\frac{n}{n+2}$ 恆成立。 (1 分)

14. $\dfrac{2025}{2027}$

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：能使用分項對消法

解析：考慮 $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots\cdots \times a_n$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times\cdots\cdots\times\frac{n-2}{n}\times\frac{n-1}{n+1}\times\frac{n}{n+2}$$

$$=\frac{2}{(n+1)(n+2)}=2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\therefore a_1+a_1a_2+a_1a_2a_3+\cdots\cdots+a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{2025}$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2026}-\frac{1}{2027}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2027}\right)=1-\frac{2}{2027}=\frac{2025}{2027}$$ 。

15. (3)

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：扇形的面積公式

解析：設扇形 A 的圓心角為 θ_A

扇形 B 的圓心角為 θ_B

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{1}{2}r^2\theta_A}{\frac{1}{2}r^2\theta_B}=\frac{\theta_A}{2\pi-\theta_A}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$\therefore 2\theta_A=(2\pi-\theta_A)(\sqrt{5}-1)$

$\Rightarrow (1+\sqrt{5})\theta_A=2\pi(\sqrt{5}-1)$

$$\Rightarrow \theta_A=\frac{2\pi(\sqrt{5}-1)}{1+\sqrt{5}}=\frac{2\pi(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5})^2-1}=\pi(3-\sqrt{5})$$

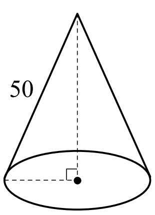
故選(3)。

16. $25\sqrt{6\sqrt{5}-10}$ 公分

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：扇形及衍生的空間圖形的幾何計算

解析：



第 15. 題中的扇形 A 弧長為

$r\theta_A=50\times\pi(3-\sqrt{5})$

$=(150-50\sqrt{5})\pi$

＝圓錐體底圓的圓周長

$\therefore$圓錐體底圓的半徑為 $\dfrac{(150-50\sqrt{5})\pi}{2\pi}=75-25\sqrt{5}$

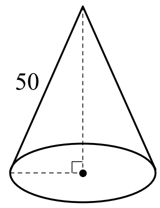
故圓錐體的高度為 $\sqrt{50^2-(75-25\sqrt{5})^2}$

$=25\sqrt{2^2-(3-\sqrt{5})^2}$

$=25\sqrt{4-(9-6\sqrt{5}+5)}$

$=25\sqrt{6\sqrt{5}-10}$ (公分)。

◎評分原則



第 15. 題中的扇形 A 弧長為

$r\theta_A=50\times\pi(3-\sqrt{5})$

$=(150-50\sqrt{5})\pi$

＝圓錐體底圓的圓周長　(1 分)

$\therefore$圓錐體底圓的半徑為 $\dfrac{(150-50\sqrt{5})\pi}{2\pi}=75-25\sqrt{5}$

(1 分)

故圓錐體的高度為 $\sqrt{50^2-(75-25\sqrt{5})^2}$　(1 分)

$=25\sqrt{2^2-(3-\sqrt{5})^2}$

$=25\sqrt{4-(9-6\sqrt{5}+5)}$

$=25\sqrt{6\sqrt{5}-10}$ (公分)。　(1 分)

17. $\int_0^4 \pi\left(\frac{3}{4}x\right)^2 dx$ ，12π 立方公分

出處：選修數學甲(上)〈積分〉

目標：使用積分求旋轉體的體積

解析：由題意得知 A 點坐標為 (4，3)

$\therefore$所求容積是 $y=\dfrac{3}{4}x$

在區間 [0，4] 繞 x 軸旋轉的旋轉體體積為

$$\int_0^4 \pi\left(\frac{3}{4}x\right)^2 dx=\frac{9\pi}{16}\int_0^4 x^2dx$$

$$=\frac{9\pi}{16}\left(\frac{1}{3}x^3\Big|_0^4\right)$$

$$=\frac{3\pi}{16}(4^3-0^3)$$

$=12\pi$ (立方公分)。

◎評分原則

由題意得知 A 點坐標為 (4，3)

$\therefore$所求容積是 $y=\dfrac{3}{4}x$

在區間 [0，4] 繞 x 軸旋轉的旋轉體體積為

$\int_0^4 \pi\left(\frac{3}{4}x\right)^2 dx=\frac{9\pi}{16}\int_0^4 x^2dx$　(2 分)

$=\frac{9\pi}{16}\left(\frac{1}{3}x^3\Big|_0^4\right)$

$=\frac{3\pi}{16}(4^3-0^3)$

$=12\pi$ (立方公分)。　(2 分)