

北北基高級中等學校
114 學年度分科測驗聯合模擬考試
數學甲考科 A 卷

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

—作答注意事項—

考試範圍：第一～二冊、數學 A 第三～四冊、選修數學甲(上)(極限與函數、微分、積分)

考試時間：80 分鐘

作答方式：

- 選擇(填)題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶(液)。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正帶(液)。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\frac{(18-1)}{(18-2)}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上的第 18-1

列的 $\frac{3}{\square}$ 與第 18-2 列的 $\frac{\square}{8}$ 劃記，如：

18-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
18-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

例：若答案格式是 $\frac{(19-1)(19-2)}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 $\frac{\square}{\square}$ 與

第 19-2 列的 $\frac{7}{\square}$ 劃記，如：

19-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐
19-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

選擇(填)題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

祝考試順利



版權所有 · 翻印必究

第壹部分、選擇（填）題（占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

1. 在坐標平面上，已知圓 $C_1: x^2 + y^2 = 9$ 與兩軸交於若干個點，圓 $C_2: (x-5)^2 + (y-12)^2 = 169$ 與兩軸也交於若干個點。試問這些交點一共可決定幾條不同的直線？
 - (1) 7 條
 - (2) 8 條
 - (3) 9 條
 - (4) 10 條
 - (5) 11 條
2. 將 1 到 18 這 18 個正整數平分成甲、乙兩組，每組各 9 個數，則在甲組的中位數比乙組中位數小 2 的條件下，1、2、3、4 都在甲組的機率為何？
 - (1) $\frac{1}{140}$
 - (2) $\frac{3}{140}$
 - (3) $\frac{7}{140}$
 - (4) $\frac{9}{140}$
 - (5) $\frac{11}{140}$
3. 坐標平面上有一菱形 $ABCD$ ，其中 A 點、 B 點分別為 x 軸正向、 y 軸正向上的動點，且 $\overline{AB} = 10$ ， C 點、 D 點皆在第一象限， $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$ ，已知在滿足上述的條件下，不論 A, B 的位置在哪裡，菱形中心 E 的位置皆在直線 $y = mx$ 上，則 m 值為下列哪一個選項？
 - (1) $\frac{1}{2}$
 - (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - (3) 1
 - (4) $\sqrt{3}$
 - (5) 2

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

4. 已知兩數列 $\langle a_n \rangle = \left\langle \sin \frac{n\pi}{2} \right\rangle$ ， $\langle b_n \rangle = \left\langle \cos \frac{n\pi}{2} \right\rangle$ ， n 為正整數，試選出正確的選項。

(1) 數列 $\langle a_n \rangle$ 收斂

(2) 數列 $\left\langle \frac{b_n}{n} \right\rangle$ 收斂

(3) 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂

(4) 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 收斂

(5) 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收斂

版權所有
翻印必究

5. 若 a 為無理數， n 為整數，且 $a^{12} + an$ ， $a^3 + 2a^2$ 及 $a^2 + a$ 皆為有理數，試選出正確的選項。

(1) $a^2 + a - 1$ 為有理數

(2) $a^3 + a^2 - a$ 為有理數

(3) $a^2 + a - 1 > 0$

(4) $a^3 = 2a - 1$

(5) $n = 144$

6. 若 A, B 為實數，有關方程組 $\begin{cases} 2^x - 2^y = A \\ 2^{x-y} = B \end{cases}$ 的敘述，試選出正確的選項。

- (1) 若方程式有實數解，則當 $B=1$ 時， $A=0$
- (2) 若方程組有實數解，則當 $A<0$ 時， $0<B<1$
- (3) 若 $A>0$ ，則方程組必有實數解
- (4) 若 $B>0$ ，則方程組必有實數解
- (5) 若 $\log A + \log(B-1) > 0$ ，則方程組有唯一解

7. 設 a 為實數，已知三次實係數函數 $f(x)$ 的首項係數為 1，多項式 $f(x)$ 除以 $x+a$ 、 x 及 $x-a$ 的餘式皆為 1，若 $y=f(x)$ 的圖形和 x 軸只有一個交點，則 a^3 值的範圍可能為何？

- (1) $a^3=0$
- (2) $0 < a^3 < \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- (3) $-\frac{3\sqrt{3}}{2} < a^3 < 0$
- (4) $a^3 < -\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- (5) $a^3 > \frac{3\sqrt{3}}{2}$

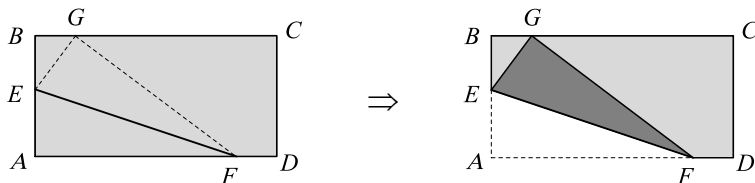
8. 在坐標空間中，若直線 $L: \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{3}$ ，平面 $E_1: x+2y=b$ ， $E_2: x+cy-2z=8$ ，

則下列敘述哪些正確？

- (1) 存在 a, b, c ，使得直線 L 垂直平面 E_1 ，且直線 L 也垂直平面 E_2
- (2) 存在 a, b, c ，使得直線 L 和平面 E_1 平行，且直線 L 也和平面 E_2 平行
- (3) 存在 a, b, c ，使得直線 L 在平面 E_1 上，且直線 L 也在平面 E_2 上
- (4) 存在 a, b, c ，使得直線 L 在平面 E_1 上，且直線 L 和平面 E_2 垂直
- (5) 存在 a, b, c ，使得直線 L 和平面 E_1 相交，且直線 L 也和平面 E_2 相交

三、選填題（占 18 分）

說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分。

9. 若 $-\cos^2 x + \cos x + k \geq 0$ 對於任意實數恆成立，則 k 的範圍為 $k \geq \textcircled{9}$ 。10. 設 $\vec{a} = (6, 8)$ 和 $\vec{b}$ 為兩平面上的向量，且 $|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}| = 40$ ，則 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 所張成的平行四邊形面積的最大值為 $\frac{\textcircled{10-1} \textcircled{10-2} \textcircled{10-3} \sqrt{\textcircled{10-4}}}{\textcircled{10-4}}$ 。(化為最簡根式)11. 有一張長方形的紙，長、寬分別為 20 公分、10 公分，今沿 $\overline{EF}$ 將 A 點摺到 $\overline{BC}$ 上與 G 點重合，其中 $\sin \angle EFA = \frac{1}{3}$ ，則 A 點軌跡的路徑長為 $\frac{\textcircled{11-1} \textcircled{11-2} \sqrt{\textcircled{11-3}}}{\textcircled{11-4}} \pi$ 。(化為最簡根式)

第貳部分、混合題或非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有 2 題組，單選題每題 4 分，選填題每題 3 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12-14 題為題組

設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足： $a_1 = \frac{1}{3}$ ， $\frac{n+1}{a_{n+1}} = \frac{n+a_n}{a_n}$ ， n 為正整數。

12. 請列出上述數列的第 2 項到第 4 項，答案要化到最簡分數。(非選擇題，3 分)

13. 請用 n 表示 a_n 的一般式，並用數學歸納法證明。(非選擇題，6 分)

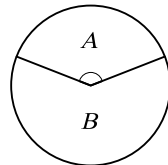
14. 試求 $a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + \cdots + a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2025} =$ $\frac{\textcircled{14-1} \textcircled{14-2} \textcircled{14-3} \textcircled{14-4}}{\textcircled{14-5} \textcircled{14-6} \textcircled{14-7} \textcircled{14-8}}$ 。(化為最簡分數)
(選填題，3 分)

15-17 題為題組

扇形是由圓上兩條半徑和被這兩條半徑所截的一段弧所圍成的平面圖形。慶生會常用的「生日帽」是將扇形的兩條邊(半徑)連接，從而組成圓錐形，此時扇形的弧長變成圓錐底部的圓周長、扇形的半徑會成為圓錐的母線(斜邊長)，扇形的頂點則成為圓錐的頂點。

15. 如右圖，若一圓形中分割成兩個扇形 A 、 B ，當 A 與 B 的面積比值

$$\frac{A}{B} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 則稱 } A \text{ 是符合黃金比例的扇形。}$$



將海報紙剪一個半徑 50 公分的圓形，並從這個圓裁出一個黃金比例的扇形，則此扇形 A 的圓心角為何？(單選題，4 分)

- (1) $\pi(\sqrt{5}-2)$
- (2) $\pi(2\sqrt{5}-3)$
- (3) $\pi(3-\sqrt{5})$
- (4) $\pi(4-\sqrt{5})$
- (5) $\pi(5-\sqrt{5})$

16. 將第 15. 題中的扇形 A 的兩條半徑接在一起(紙片黏貼處忽略不計)，做成圓錐形的生日帽，試求生日帽的頂點到底面的距離。(非選擇題，4 分)

17. 取另一個扇形作成圓錐形容器，求其容積時，先定旋轉軸為 x 軸，頂點為原點 $O(0, 0)$ ，恰好此容器是由直線 $3x-4y=0$ 在第一象限上，一段長度為 5 的線段 $\overline{OA}$ 繞 x 軸旋轉而得。試將容積寫成積分的型式 $\left(\int_a^b f(x) dx\right)$ ，並求容積為多少立方公分？(非選擇題，4 分)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和： $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ； $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

4. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

5. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$,

$$\text{算術平均數 } \mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \text{ 標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n\mu_X^2 \right)}$$

6. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$,

$$\text{相關係數 } r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$$

最適直線(迴歸直線)方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

7. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

8. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 5 \approx 0.6990$ ， $\log 7 \approx 0.8451$

9. 錐體體積公式： $\frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高}$