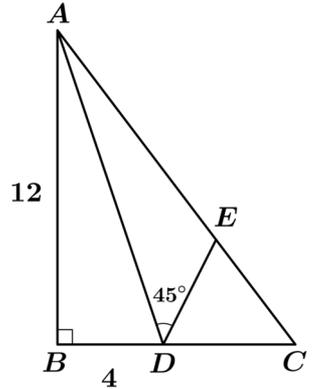


國立彰化高級中學 113 學年度校內學科能力競賽數學科初賽試題

一、填充題 [課內知識]: 每題 5 分

1. 分母有理化 $\frac{6}{\sqrt{6}-\sqrt{10}+\sqrt{15}-5} = ?$

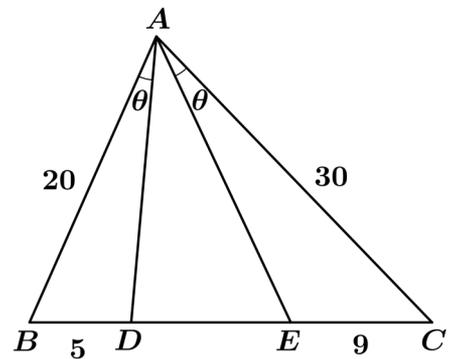
2. 如圖所示, $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $\overline{AB} = 12$, D 在 \overline{BC} 上使得 $\overline{BD} = 4$, $\angle ADE = 45^\circ$ 且 $\angle BAD = \angle CAD$, 求 $\overline{AE} = ?$



3. 求 $\frac{1 - 2\log_6 5 \cdot \log_{10} 3 \cdot \log_{15} 2}{\log_6 5 \cdot \log_{10} 3 + \log_{10} 3 \cdot \log_{15} 2 + \log_{15} 2 \cdot \log_6 5} = ?$

4. 平面坐標中, 已知 O 為 $\triangle ABC$ 的外心, $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 2$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, 則 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = ?$

5. 如圖所示, $\triangle ABC$ 中, $\overline{AB} = 20$, $\overline{AC} = 30$, D, E 在 \overline{BC} 上使得 $\overline{BD} = 5$, $\overline{CE} = 9$ 且 $\angle BAD = \angle CAE$, 求 $\overline{DE} = ?$



6. 已知 b, c 為整數, 若方程式 $5x^2 + bx + c = 0$ 的兩根皆大於 -1 且小於 0 , 則數對 $(b, c) = ?$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $A(14, -3)$, $\angle B, \angle C$ 的角平分線方程式分別為 $2x - y - 1 = 0$, $x - 1 = 0$, 則直線 BC 的方程式為何?
(答案請以 $ax + by + c = 0$ 的形式作答)

8. 求 $2025^4 - 4 \times 2023^4 + 6 \times 2021^4 - 4 \times 2019^4 + 2017^4 = ?$

二、填充題〔延伸知識〕：每題 7 分

9. 已知實數 x, y, z 滿足 $5x^2 + 10y^2 + 13z^2 = 12xy + 4yz + 6zx$ 且 $x + 2y + 3z = 20$ ，求序組 $(x, y, z) = ?$

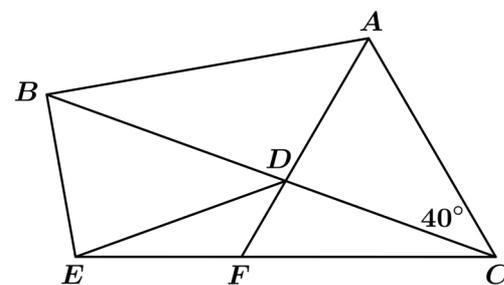
10. 函數 f 滿足 $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 24x$ ，其中實數 x 不等於 0 或 1，求 $f(3) = ?$

11. 求 $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}}{\frac{1}{99} + \frac{2}{98} + \cdots + \frac{99}{1}} = ?$

12. 設實數數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}}{3a_{n-2} - 2a_{n-1}}$ ， $n \geq 3$ ，若 $a_1 = 1$ 、 $a_{10} = 10$ ，則 $a_{19} = ?$

13. 若 $a^{\log_b c} \cdot b^{\log_c a} = 2025$ ，其中 b, c 皆為大於 1 的實數，求實數 a 的最大值？

14. 如圖所示， $\angle ACB = 40^\circ$ ， $\triangle AFC$ 為一正三角形， D 為 \overline{AF} 上一點，且 $\overline{BD} = \overline{AC}$ 、 $\overline{CD} = \overline{DE}$ ，求 $\angle ABC = ?$

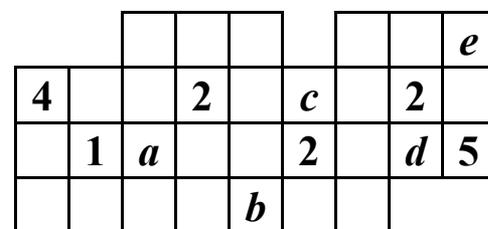


15. 若 $\frac{\sin 12^\circ + \sin 28^\circ + \sin 66^\circ + \sin 82^\circ}{\cos 12^\circ + \cos 20^\circ + \cos 66^\circ + \cos 74^\circ} = \frac{\cos A^\circ}{\cos B^\circ}$ ，其中 $0 < A, B < 90$ ，則 $A + B = ?$

16. 如圖所示，請在每一個小方格中填入正整數 1~5 其中一數，且必須滿足下列條件：

- ① 相鄰兩方格的數字不可相同。
- ② 相同數字的兩方格不可與同一方格相鄰。

求 $a + b + c + d + e = ?$



三、證明題：每題 10 分

17. 已知當正整數 n 滿足 \sqrt{n} 不是正整數時， \sqrt{n} 為無理數。例如： $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots$ 皆為無理數。

證明： $\tan 1^\circ$ 為無理數。

18. 設圓 $x^2 + y^2 = 1$ 上有三點 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ ，已知 $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = 0$ 。

證明： $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \frac{3}{2}$ 。

19. $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB < \angle BAC < 90^\circ$ 。設 P 在 \overline{AC} 上， Q 為 $\triangle ABC$ 的外接圓 Γ 上一點 ($Q \neq A$)。已知直線 PQ 與 Γ 交於另一點 R ，且 $\overline{AB} = \overline{BP} = \overline{BQ}$ 。

證明： $\overline{BR} \perp \overline{AC}$ 。

20. 動物園養了 9 隻猴子，某天園方載一卡車的香蕉來犒賞猴子們，看到那滿坑滿谷的香蕉，每隻猴子都激動地瘋狂搶食 (假設香蕉的數量足夠)。

證明：存在某幾隻 (可能一隻) 猴子搶到的香蕉數量總和為 9 的倍數。

國立彰化高級中學 113 學年度校內學科能力競賽數學科初賽答案

一、填充題 [課內知識]，每題 5 分

1. $\sqrt{6} + \sqrt{10} - \sqrt{15} - 5$

2. 10

3. 1

4. $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

5. 11

6. (5,1)

7. $6x - y + 69 = 0$

8. 384

二、填充題 [延伸知識]，每題 7 分

9. (6,4,2)

10. 50

11. $\frac{1}{100}$

12. $-\frac{10}{4607}$

13. 45

14. 30°

15. 12

16. 20