

■答案需化成[最簡分數]或[最簡根式]，並請寫在答案卷上，填充題全對才給分。

一、 填充題 (每題 6 分，共 72 分)

1. 有 5 筆數據：40、42、44、54、 $a$ ，若其中位數等於平均數，則其全距為\_\_\_\_\_。
2. 三角形  $ABC$  為等腰直角三角形，其中  $\angle A = 90^\circ$ ，設  $P$ 、 $S$  依序為  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  上的點， $Q$ 、 $R$  為  $\overline{BC}$  上的兩點，且四邊形  $PQRS$  為正方形；若三角形  $ABC$  的面積是 1，則正方形  $PQRS$  的面積為\_\_\_\_\_。
3. 化簡根式： $\sqrt{\frac{4009^3 - 4005^3 - 16}{4}}$ 。
4. 兩實數  $a$ 、 $b$  滿足： $(a^4 - 4a^2 + 6)(3b^2 + 18b + 32) = 10$ ，則  $a \times b =$ \_\_\_\_\_。
5. 設  $a$  為方程式： $x^2 - 17x - 139 = 0$  的一根，則  $(a + 6)^2 + \frac{1}{(a+6)^2} =$ \_\_\_\_\_。
6. 有一個等差數列，其項數為  $N$ ， $N > 10$ ，且每一項皆大於 0，若其前五項的總和為  $A$ ，末五項的總和為  $B$ ，全部  $N$  項的總和為  $C$ ，則  $N$  可以用  $A$ 、 $B$ 、 $C$  表示為\_\_\_\_\_。
7. 有一個英文單字由五個大寫的英文字母組成，現在用數字 1、2、3、...、26 依序代替大寫的英文字母  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、...、 $Z$ ，代替後滿足下列五個關係式：  
第一個與第二個英文字母用數字代替後，和為 25。  
第一個與第三個英文字母用數字代替後，和為 8。  
第一個與第四個英文字母用數字代替後，和為 23。  
第一個與第五個英文字母用數字代替後，和為 12。

五個英文字母用數字代替後，和為 47。

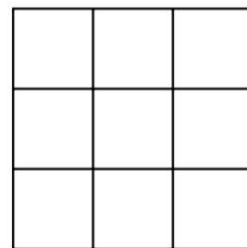
則此英文單字為\_\_\_\_\_。(請用大寫的英文字母拼出來)

8. 有一個梯形  $ABCD$ ，其中  $\overline{AD} // \overline{BC}$ ， $\overline{AB} = 5$ 、 $\overline{BC} = 20$ 、 $\overline{CD} = 7$ 、 $\overline{DA} = 14$ ，則  $\overline{BD} =$ \_\_\_\_\_。

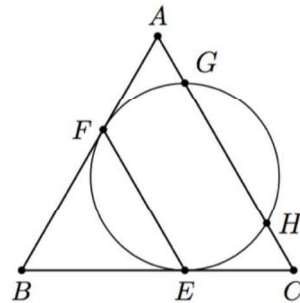
9. 丟一個公正的骰子兩次，第一次點數為  $b$ ，第二次點數為  $c$ ，則「 $x$  的方程式： $x^2 + bx + c = 0$  有兩個**整數根**」之機率為\_\_\_\_\_。

10. 有一個數列  $\{a_n\}$ ， $a_1 = 20$ ，從第二項開始，每一項都是前一項的各位數字平方和，如  $a_2 = 2^2 + 0^2 = 4$ 。此數列前 2024 項中，共有\_\_\_\_\_項是平方數。

11. 將「三個 1、四個 2、兩個 3」填入  $3 \times 3$  的方格，每格一個數字，使得**每行、每列**所填的**數字之總和**均為**奇數**，共有\_\_\_\_\_種填法。



12. 有一個正三角形  $ABC$ ，今有一個圓與其兩邊相切於  $E$ 、 $F$ ，並交  $\overline{AC}$  於  $G$ 、 $H$  兩點，如圖。若  $\overline{EF} = \overline{GH}$ ，且  $\overline{AB} = 1$ ，則  $\overline{EF} =$ \_\_\_\_\_。



二、計算證明題 (28 分，需寫出過程，否則不予計分)

1. 若正整數  $N$  可以表示成兩個整數的平方差，則稱  $N$  為「好數」。例如： $7 = 4^2 - 3^2$ ， $16 = 5^2 - 3^2$ ，7 與 16 都是「好數」。2 無法表示成兩個整數的平方差，2 不是「好數」。

試回答下列問題：

- (1) 設  $A = 47$ 、 $B = 67$ ，已知  $A$ 、 $B$  都是「好數」，試判斷  $A + B$  是否為「好數」，並說明原因。 4 分
- (2) 若正整數  $P$  與  $Q$  都是「好數」，試證明： $P \times Q$  也是「好數」。 8 分
2. 銳角三角形  $ABC$ ，其中  $\angle B = 45^\circ$ ，設  $D$  為  $\overline{BC}$  上的點，滿足  $\angle ADC = 60^\circ$ 、 $2\overline{BD} = \overline{DC}$ ；若  $\overline{BC}$  的中垂線交  $\overline{AD}$  於  $E$  點，試證明： $E$  為三角形  $ABC$  的外心。 8 分

3. Let  $\mathbb{N}$  denote the set of positive integers and  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  be a function with the following properties:

$$f(1) = 1, \quad f(2n) = n \times f(n) \quad \text{for any positive integer } n.$$

What is the value of  $f(2^{113})$ ? (Write down your answer by using prime factorization in exponent form.)      prime factorization : 質因數分解

8 分