

版權所有，翻印必究

北北基高級中等學校

114 學年度學科能力測驗聯合模擬考試

數學  
B  
考  
科  
參  
考  
答  
案  
暨  
詳  
解

數學  
B

翰林出版事業股份有限公司



版權所有 · 翻印必究

|        |           |        |              |           |     |           |
|--------|-----------|--------|--------------|-----------|-----|-----------|
| 1.     | 2.        | 3.     | 4.           | 5.        | 6.  | 7.        |
| (5)    | (5)       | (3)    | (2)          | (4)       | (3) | (1)(2)(5) |
| 8.     | 9.        | 10.    | 11.          | 12.       |     |           |
| (4)(5) | (1)(2)(3) | (1)(4) | (1)(2)(4)(5) | (1)(3)(5) |     |           |

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (5)

出處：第三冊〈按比例成長模型〉

目標：學生能在提供的平面坐標系與對數函數圖形資料中，識別函數走勢與關鍵坐標

解析：觀察選項可令此對數函數為  $y = \log_a(x+b)$

將  $(0, 0)$ 、 $(2, 1)$  及  $(8, 2)$  三點分別代入得

$$\begin{cases} 0 = \log_a b \\ 1 = \log_a (2+b) \\ 2 = \log_a (8+b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^0 = b = 1 \\ a^1 = 2+b \\ a^2 = 8+b \end{cases}$$

$$\text{可得} \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

則該對數函數為  $y = \log_3(x+1)$

故選(5)。

2. (5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：由餘式定理出發，觀察係數後討論出答案

解析：由餘式定理可知，

$$\begin{cases} f(2) = 8a + 4b + 2c + d = 1 & \text{.....①} \\ f(1) = a + b + c + d = 2 & \text{.....②} \\ f(-1) = -a + b - c + d = 3 & \text{.....③} \\ f(-2) = -8a + 4b - 2c + d = 4 & \text{.....④} \end{cases}$$

觀察係數後討論：

$$\text{由①+④、②+③得} \begin{cases} 8b + 2d = 5 \\ 2b + 2d = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (b, d) = \left(0, \frac{5}{2}\right)$$

$$\text{則 } 3b + 8d = 3 \times 0 + 8 \times \frac{5}{2} = 20$$

故選(5)。

3. (3)

出處：第一冊〈數與式〉、第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

目標：能操作並觀察多重週期性現象

解析：觀察循環規律，各色燈泡的循環規律亦可視為：

紅燈：「暗 2 秒，再亮 3 秒」，週期為 5 秒

綠燈：「暗 3 秒，再亮 4 秒」，週期為 7 秒

藍燈：「暗 5 秒，再亮 5 秒」，週期為 10 秒

設  $t_0$  為三種顏色的燈泡同時由亮轉暗的時刻，第  $t$  秒內各色燈泡的狀態如下表，其中  $\times$  表暗燈， $\bigcirc$  表亮燈

|     |          |          |            |            |            |            |            |            |            |            |
|-----|----------|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $t$ | 1        | 2        | 3          | 4          | 5          | 6          | 7          | 8          | 9          | 10         |
| 紅燈  | $\times$ | $\times$ | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ | $\times$   | $\times$   | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ |
| 綠燈  | $\times$ | $\times$ | $\times$   | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ | $\times$   | $\times$   | $\times$   |
| 藍燈  | $\times$ | $\times$ | $\times$   | $\times$   | $\times$   | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ |

|     |            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $t$ | 11         | 12         | 13         | 14         | 15         | 16         | 17         | 18         | 19         | 20         |
| 紅燈  | $\times$   | $\times$   | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ | $\times$   | $\times$   | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ |
| 綠燈  | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ | $\times$   | $\times$   | $\times$   | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ |
| 藍燈  | $\times$   | $\times$   | $\times$   | $\times$   | $\times$   | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ | $\bigcirc$ |

依表格可知

當  $t=1$ ，即  $[t_0, t_0+1]$  時，紅、綠、藍燈皆為暗燈

當  $t=2$ ，即  $[t_0+1, t_0+2]$  時，紅、綠、藍燈皆為暗燈

當  $t=3$ ，即  $[t_0+2, t_0+3]$  時，紅燈為亮燈，綠、藍燈皆為暗燈

⋮

當  $t=17$ ，即  $[t_0+16, t_0+17]$  時，紅、綠燈皆為暗燈，藍燈為亮燈

當  $t=18$ ，即  $[t_0+17, t_0+18]$  時，紅、綠、藍燈皆為亮燈

得最小值為 17，即至少再過 17 秒

故選(3)。

4. (2)

出處：第四冊〈矩陣與資料表格〉

目標：透過矩陣乘法與線性運算技巧，於題目中已知矩陣等式條件下，分析並推導出未知列向量，學會以矩陣表示線性關係，並透過矩陣運算驗證結果正確性

解析：由乘法反方陣可知，

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1 \times 1 - 2 \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \times 1 + (-2) \times 5 & 1 \times 3 + (-2) \times 6 & 1 \times 0 + (-2) \times 9 \\ 1 \times 1 + 1 \times 5 & 1 \times 3 + 1 \times 6 & 1 \times 0 + 1 \times 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & -3 & -6 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{則 } [0 \quad 1]A = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} -3 & -3 & -6 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= [2 \quad 3 \quad 3]$$

可知  $a=2, b=3, c=3$

則  $a-b+c=2-3+3=2$

故選(2)。

〔另解〕

由題意可知， $[1 \quad 2]A = [1 \quad 3 \quad 0]$ 、

$$[-1 \quad 1]A = [5 \quad 6 \quad 9]$$

則由矩陣基本運算可知

$$([1 \quad 2] + [-1 \quad 1])A = [1 \quad 3 \quad 0] + [5 \quad 6 \quad 9]$$

$$\Rightarrow [0 \quad 3]A = [6 \quad 9 \quad 9]$$

$$\Rightarrow [0 \quad 1]A = [2 \quad 3 \quad 3]$$

可知  $a=2, b=3, c=3$

則  $a-b+c=2-3+3=2$

故選(2)。

5. (4)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：藉由直線平行概念，讓學生找出圓的半徑，進而計算點到直線的最近與最遠距離

解析：已知  $L_2$  通過圓心，且  $L_1$  和圓  $\Gamma$  相切

$$\text{則 } d(L_1, L_2) = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{5} \text{ 為圓 } \Gamma \text{ 的半徑 } r$$

$$\text{又 } d(L_2, L_3) = \frac{7}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{7}{5}$$

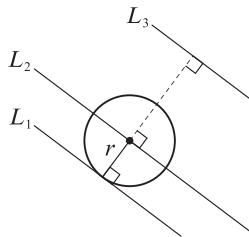
如右圖，則  $P$  點到  $L_3$  距離的

$$\text{最大值 } M = \frac{7}{5} + \frac{3}{5} = 2,$$

$$\text{最小值 } m = \frac{7}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\text{則 } 2M + m = 2 \times 2 + \frac{4}{5} = \frac{24}{5}$$

故選(4)。

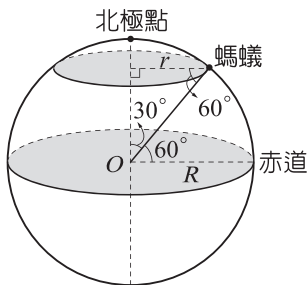


6. (3)

出處：第四冊〈空間概念與空間坐標系〉

目標：運用球面幾何與半徑計算公式，分析空間中點與球心、經緯點間的距離關係，須具備空間思維與三維圖形理解能力

解析：此地球儀的半徑為  $R$ ，設北緯  $60^\circ$  的緯線半徑為  $r$ ，如下圖



$$\text{由題意知弧長 } s = R\theta = R \times \frac{\pi}{6} = \frac{10\pi}{3} \Rightarrow R = 20$$

可得此地球儀的半徑  $R = 20$  公分

$$\text{而北緯 } 60^\circ \text{ 的緯線半徑 } r = R \cos \frac{\pi}{3} = 20 \times \frac{1}{2} = 10 \text{ 公分}$$

因此，此地球儀北緯  $60^\circ$  的緯線一圈長度為  $10 \times 2\pi = 20\pi$  公分

故選(3)。

## 二、多選題

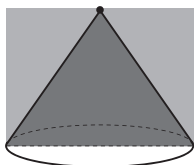
7. (1)(2)(5)

出處：第四冊〈圓錐曲線的認識與應用〉

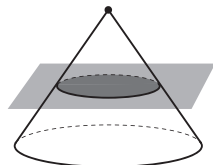
目標：針對圓錐曲線的性質與截面的方向進行討論

解析：(1) ○：若截面通過直圓錐上方的點且垂直桌面，則會呈現等腰三角形，如圖(一)

(2) ○：若截面不通過直圓錐上方的點且平行桌面，則會呈現圓形，如圖(二)



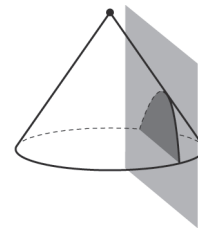
圖(一)



圖(二)

(3)(4) ×：因為截面需要平行或垂直桌面，故不可能發生

(5) ○：若截面不通過直圓錐上方的點且垂直桌面，則會呈現雙曲線的一部分，如圖(三)



圖(三)

故選(1)(2)(5)。

8. (4)(5)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：運用等差數列的定義與級數和公式

解析：(1) ×：已知  $\langle a_n \rangle$  為等差數列，且公差  $d > 0$

$$\text{故 } S_{300} = \frac{(2a_1 + 299d) \times 300}{2}$$

$$3 \times S_{100} = 3 \times \frac{(2a_1 + 99d) \times 100}{2} = \frac{(2a_1 + 99d) \times 300}{2}$$

$$\text{所以 } S_{300} \neq 3 \times S_{100}$$

(2) ×：舉反例：若  $a_1 = -300$ ， $d = 1$ ，則

$$\begin{aligned} S_{200} &= a_1 + a_2 + \dots + a_{200} \\ &= (-300) + (-299) + \dots + (-201) \\ &\quad + \dots + (-101) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{100} &= a_1 + a_2 + \dots + a_{100} \\ &= (-300) + (-299) + \dots + (-201) \end{aligned}$$

$$\text{則 } S_{100} > S_{200}$$

(3) ×：  $S_{100} + S_{300}$

$$= \frac{(2a_1 + 99d) \times 100}{2} + \frac{(2a_1 + 299d) \times 300}{2}$$

$$= 400a_1 + 49800d$$

$$2 \times S_{200} = 2 \times \frac{(2a_1 + 199d) \times 200}{2}$$

$$= 400a_1 + 39800d$$

$$\text{所以 } S_{100} + S_{300} \neq 2 \times S_{200}$$

(4) ○：  $S_{400} - S_{200} = a_{201} + a_{202} + \dots + a_{400}$

$$= \frac{(2a_1 + 599d) \times 200}{2}$$

$$= 200a_1 + 59900d$$

$$S_{300} - S_{100} = a_{101} + a_{102} + \dots + a_{300}$$

$$= \frac{(2a_1 + 399d) \times 200}{2}$$

$$= 200a_1 + 39900d$$

$$\text{又 } d > 0, \text{ 所以 } S_{400} - S_{200} > S_{300} - S_{100}$$

(5) ○：  $S_{205} - S_{195} = a_{196} + a_{197} + \dots + a_{205}$

$$= \frac{(2a_1 + 399d) \times 10}{2}$$

$$\Rightarrow 20 \times (S_{205} - S_{195}) = 20 \times \frac{(2a_1 + 399d) \times 10}{2}$$

$$= 200a_1 + 39900d$$

$$\text{承(4), 所以 } S_{300} - S_{100} = 20 \times (S_{205} - S_{195})$$

故選(4)(5)。

9. (1)(2)(3)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：透過對數值與時間的對應，判斷在對數時間下的增長速度

解析： $a=10^9$ ， $b=10^{9.301}=10^{0.301} \times 10^9 \approx 2 \times 10^9$ ，  
 $c=10^{10}$ ， $d=10^{10.301}=10^{0.301} \times 10^{10} \approx 2 \times 10^{10}$ ， $e=10^{11}$ ，  
 由題意知此質點每 9 分鐘可走  $10^9$  單位

$$(1) \bigcirc : \overline{AB} = |b - a| \approx 2 \times 10^9 - 10^9 = 10^9$$

因此從 A 點出發，再 9 分鐘 (約 8:18) 可抵達 B 點

$$(2) \bigcirc : \overline{AC} = |c - a| = 10^{10} - 10^9 = 10^9 \times (10 - 1) = 9 \times 10^9$$

因此從 A 點出發，再  $9 \times 9 = 81$  分鐘 (約 9:30) 可抵達 C 點

$$(3) \bigcirc : \overline{AD} = |d - a| \approx 2 \times 10^{10} - 10^9 = 10^9 \times (20 - 1) = 19 \times 10^9$$

因此從 A 點出發，大約再  $19 \times 9 = 171$  分鐘 (約 11:00) 可抵達 D 點

$$(4) \times : \overline{AE} = |e - a| = 10^{11} - 10^9 = 10^9 \times (100 - 1) = 99 \times 10^9$$

因此從 A 點出發，再  $99 \times 9 = 891$  分鐘 (約 23:00) 可抵達 E 點

$$(5) \times : \text{已知從原點 } O \text{ 到 } A \text{ 點所花費時間為 } 9 \text{ 分鐘}$$

由(4)可知從原點 O 到 E 點所花費時間為

$$9 + 891 = 900 \text{ 分鐘}$$

故「從原點 O 到 A 點所花費時間」與「從原點

$$O \text{ 到 } E \text{ 點所花費時間」的比值為 } \frac{9}{900} = \frac{1}{100}$$

故選(1)(2)(3)。

10. (1)(4)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：分析三次多項式函數的對稱性特徵 (中心對稱)，結合係數與圖形變化關係，判斷圖像是否符合指定特性

解析：(1)  $\bigcirc : \because y=f(x)$  圖形的對稱中心為  $(-2, 0)$

$$\therefore \text{令 } f(x) = a(x+2)^3 + p(x+2) \cdots \cdots (*)$$

因  $y=f(x)$  圖形通過  $(0, 4)$ ，代入(\*)得

$$f(0) = a(0+2)^3 + p(0+2) = 8a + 2p = 4 > 0$$

又  $a < 0$ ，可知  $p > 0$

故  $y=f(x)$  圖形在對稱中心附近會近似

$$y=p(x+2)，$$

即一條斜率  $p > 0$  的直線

$$(2)(3) \times : f(x) = a(x+2)^3 + p(x+2)$$

$$= ax^3 + 6ax^2 + (12a+p)x + (8a+2p)$$

$$= ax^3 + bx^2 + cx + 4$$

$$\Rightarrow b = 6a < 0, c = 12a + p$$

$$\text{又 } 8a + 2p = 4 \Rightarrow p = 2 - 4a,$$

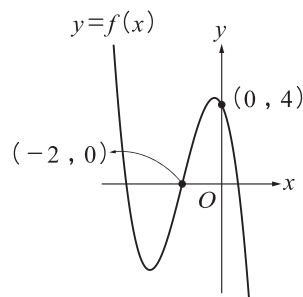
$$\text{可得 } c = 12a + p = 8a + 2$$

$$\text{若 } a > -\frac{1}{4}, \text{ 則 } c > 0$$

因此 c 不一定為負

$$(4) \bigcirc : \text{因 } y=f(x) \text{ 圖形通過 } (0, 4), \text{ 且對稱中心為 } (-2, 0)$$

又  $a < 0$ ，由圖可知  $y=f(x)$  圖形必和 x 軸的正向恰有一個交點



$$(5) \times : f(-x) = a(-x+2)^3 + p(-x+2)$$

$$= -a(x-2)^3 - p(x-2)$$

$$\text{可得 } y=f(-x)-8 = -a(x-2)^3 - p(x-2)-8$$

$$= A(x-2)^3 + P(x-2)-8$$

圖形的對稱中心為  $(2, -8)$

故選(1)(4)。

11. (1)(2)(4)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：能在統計資料展示中，識別不同單位轉換對迴歸直線 (最適直線) 方程式與相關係數的影響，以及資料標準化處理後的變化

解析：由題意知  $X' = 3X$ ， $Y' = 0.25Y$

$$(1) \bigcirc : r = 0.9 > 0, \text{ 呈現正相關}$$

$$(2) \bigcirc : m = r \times \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = \frac{9}{10} \times \frac{5}{3} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$(3) \times : r' = r = 0.9$$

$$(4) \bigcirc : \text{設單位轉算後的標準差分別為 } \sigma_{X'}, \sigma_{Y'}$$

$$\text{則 } \sigma_{X'} = 3\sigma_X, \sigma_{Y'} = 0.25\sigma_Y$$

$$\text{故 } m' = r' \times \frac{\sigma_{Y'}}{\sigma_{X'}} = r \times \frac{0.25\sigma_Y}{3\sigma_X} = \frac{1}{12} m < m$$

$$(5) \bigcirc : \text{設單位轉算後的平均數分別為 } \mu_{X'}, \mu_{Y'}, \text{ 則}$$

$$\mu_{X'} = 3\mu_X = 3 \times 50 = 150,$$

$$\mu_{Y'} = 0.25\mu_Y = 0.25 \times 2300 = 575$$

$$\text{則直線 } L' \text{ 必通過 } (\mu_{X'}, \mu_{Y'}) = (150, 575)$$

故選(1)(2)(4)(5)。

12. (1)(3)(5)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉、第四冊〈機率〉

目標：學生將能根據排列組合與機率的基本定義與公式，分析簡單事件中可能情況的排列數、組合數，並計算事件發生的機率

解析：三人任取 3 張不同卡片的方法數為  $C_3^7 \times 3!$

$$(1) \bigcirc : \text{三張卡片數字和為偶數的情況分為「抽到卡片為}$$

3 張偶數」或「抽到卡片為 2 張奇數、1 張偶數」

故三張卡片數字和為偶數的機率為

「抽到卡片為 3 張偶數的機率」+「抽到卡片為 2 張奇數、1 張偶數的機率」

$$= \frac{C_3^3 \times 3! + C_2^3 C_1^3 \times 3!}{C_3^7 \times 3!} = \frac{19}{35}$$

$$(2) \times : \text{三張卡片數字積為偶數的機率為}$$

1 - 「抽到卡片為 3 張奇數的機率」

$$= 1 - \frac{C_3^3 \times 3!}{C_3^7 \times 3!} = \frac{31}{35}$$

- (3) ○：由於卡片數字為 1 到 7  
則三張卡片數字為等差數列可分為  
「公差為 1」、「公差為 2」、「公差為 3」  
公差為 1 有 (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5),  
(4, 5, 6), (5, 6, 7) 以上 5 種方法  
公差為 2 有 (1, 3, 5), (2, 4, 6), (3, 5, 7) 以  
上 3 種方法  
公差為 3 有 (1, 4, 7) 以上 1 種方法  
綜合以上討論，共有 5+3+1=9 種方法  
則三張卡片數字為等差數列的機率為

$$\frac{9 \times 3!}{C_3^7 \times 3!} = \frac{9}{35}$$

- (4) ×：大寶所持卡片數字大於二寶與小寶卡片數字  
代表取的三張卡片中，數字最大的一定由大寶  
拿到，另外兩張則任意分給二寶與小寶  
其方法數為  $C_3^7 \times C_1^1 \times 2!$

則大寶所持卡片數字大於二寶與小寶卡片數字  
的機率為  $\frac{C_3^7 \times C_1^1 \times 2!}{C_3^7 \times 3!} = \frac{1}{3}$

- (5) ○：假設大寶抽到 3 號卡片的事件為  $A$ ，二寶所持  
卡片數字大於小寶卡片數字的事件為  $B$ ，則  
「已知大寶抽到 3 號卡片，則二寶所持卡片數  
字大於小寶卡片數字」的機率為

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{C_2^6 \times C_1^1}{C_2^6 \times 2!} = \frac{1}{2}$$

故選(1)(3)(5)。

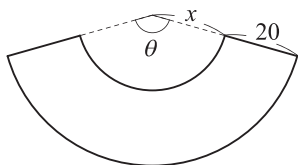
### 三、選填題

13.  $1100\pi$

出處：第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

目標：應用圓柱體與圓錐體的表面積計算公式，結合給定參  
數(高度、底半徑等)，求出複合模型的總表面積

解析：上圓的圓周為  $20\pi$  英寸，表面積為  $100\pi$  平方英寸  
下圓的圓周為  $40\pi$  英寸，表面積為  $400\pi$  平方英寸  
側面展開為圓環扇形，如下示意圖



令其圓心角為  $\theta$ ，虛線長為  $x$  英寸

$$\begin{cases} x\theta = 20\pi \\ (x+20)\theta = 40\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \pi \\ x = 20 \end{cases}$$

因此側面的圓環扇形面積為

$$\frac{1}{2}(40^2 - 20^2)\pi = 600\pi \text{ 平方英寸}$$

故總表面積為  $100\pi + 400\pi + 600\pi = 1100\pi$  平方英寸。

14. 765

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：運用等比級數進行平方和的計算

解析：令此等比數列的公比為  $r$ ，將條件改寫成

$$\begin{cases} a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 = -15 \\ |a_1| + |a_1r| + |a_1r^2| + |a_1r^3| = 45 \end{cases}$$

$$\because a_1 > 0 \quad \therefore r < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 = -15 \dots\dots\dots ① \\ a_1 - a_1r + a_1r^2 - a_1r^3 = 45 \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

利用①+②與①-②整理後可得

$$\begin{cases} 2a_1 + 2a_1r^2 = 30 \dots\dots\dots ③ \\ 2a_1r + 2a_1r^3 = -60 \dots\dots\dots ④ \end{cases}$$

由  $\frac{④}{③}$  可得  $r = -2$ ，故  $a_1 = 3$

$$\begin{aligned} \text{綜合以上，} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \\ = 3^2 + (-6)^2 + 12^2 + (-24)^2 = 765. \end{aligned}$$

15. 186

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：使用排列計數原則，計算符合條件的排列總數

解析：Case1：擊球一次，共有 6 種可能

Case2：擊球兩次，共有  $6 \times 5 = 30$  種可能

Case3：擊球三次，共有  $6 \times 5 \times 5 = 150$  種可能

綜合以上討論，共有  $6 + 30 + 150 = 186$  種可能。

16.  $\frac{10}{3}$

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

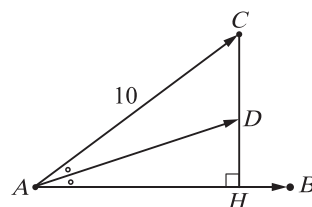
目標：能知道內積的性質，並利用三角比的邊長關係計算

解析：假設由  $C$  點作垂線交  $\overleftrightarrow{AB}$  於  $H$  點

且由題目知  $D$  在  $\angle CAB$  的內角平分線上，且

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$$

故  $D$  點在  $\overline{CH}$  上，如下圖



$$\text{則 } \overline{AH} = \overline{AC} \times \cos \angle CAB = 10 \times \frac{4}{5} = 8,$$

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

由內角平分線性質可知，

$$\overline{CD} : \overline{DH} = \overline{AC} : \overline{AH} = 10 : 8$$

$$\text{故 } \overline{CD} = 6 \times \frac{10}{10+8} = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}.$$

17. 30

出處：第一冊〈數與式〉

目標：利用算幾不等式之概念推導出  $a, b$  的最小值發生在等  
號成立之下，進而得到  $2a+b$  之可能值

$$\text{解析：} \frac{9a^2 + b^2}{3ab} = \frac{3a}{b} + \frac{b}{3a} \geq 2\sqrt{\frac{3a}{b} \times \frac{b}{3a}} = 2$$

可知等號成立時即為其最小值

$$\text{故 } \frac{3a}{b} = \frac{b}{3a} = 1 \Rightarrow b = 3a,$$

此時數對  $(a, b) = (t, 3t)$ ， $t$  為正整數

已知  $a < b < 10$ ，且  $a, b$  為正整數

所有可能數對  $(a, b) = (1, 3), (2, 6), (3, 9)$

則  $2a+b$  的所有可能之值為 5, 10, 15

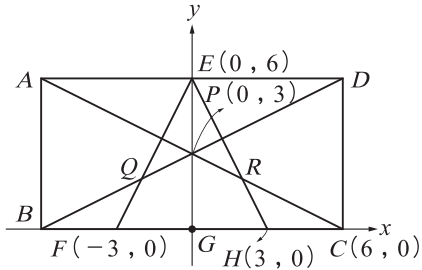
以上 3 種可能之值的總和為  $5 + 10 + 15 = 30$ 。

18.  $Q(-2, 2), R(2, 2)$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：建立坐標後，以直線對稱性探討

解析： $ABCD$  是一個面積為 72 平方單位的矩形  
且  $\overline{AD} = 2\overline{AB}$ ，可知  $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{AD} = 12$



建立坐標系，令  $G(0, 0)$ ， $C(6, 0)$ ， $E(0, 6)$   
則  $H(3, 0)$ ， $P(0, 3)$

得  $\overleftrightarrow{AC} : x + 2y = 6$  且  $\overleftrightarrow{EH} : 2x + y = 6$

$\therefore R$  點為  $\overleftrightarrow{AC}$  和  $\overleftrightarrow{EH}$  的交點

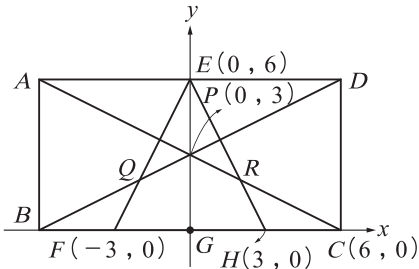
$$\therefore \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + y = 6 \end{cases}, \text{ 解得 } x = 2, y = 2$$

即  $R$  點坐標為  $(2, 2)$

由對稱性知： $Q$  點坐標為  $(-2, 2)$ 。

◎評分原則

$ABCD$  是一個面積為 72 平方單位的矩形  
且  $\overline{AD} = 2\overline{AB}$ ，可知  $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{AD} = 12$



建立坐標系，令  $G(0, 0)$ ， $C(6, 0)$ ， $E(0, 6)$

則  $H(3, 0)$ ， $P(0, 3)$  (2 分)

得  $\overleftrightarrow{AC} : x + 2y = 6$  且  $\overleftrightarrow{EH} : 2x + y = 6$  (1 分)

$\therefore R$  點為  $\overleftrightarrow{AC}$  和  $\overleftrightarrow{EH}$  的交點

$$\therefore \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + y = 6 \end{cases}, \text{ 解得 } x = 2, y = 2$$

即  $R$  點坐標為  $(2, 2)$  (1 分)

由對稱性知： $Q$  點坐標為  $(-2, 2)$ 。 (1 分)

19.  $\cos \angle FQP = -\frac{4}{5}$ ， $\cos \angle QPR = -\frac{3}{5}$

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：建立坐標後，以向量內積定義進行討論

解析：承 18.，

$$\overrightarrow{QF} = (-1, -2), \overrightarrow{QP} = (2, 1)$$

$$\text{得 } \cos \angle FQP = \frac{\overrightarrow{QF} \cdot \overrightarrow{QP}}{|\overrightarrow{QF}| |\overrightarrow{QP}|} = \frac{-2-2}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = -\frac{4}{5}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{PQ} = (-2, -1), \overrightarrow{PR} = (2, -1)$$

$$\text{得 } \cos \angle QPR = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PR}|} = \frac{-4+1}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = -\frac{3}{5}。$$

◎評分原則

承 18.，

$$\overrightarrow{QF} = (-1, -2), \overrightarrow{QP} = (2, 1)$$

$$\text{得 } \cos \angle FQP = \frac{\overrightarrow{QF} \cdot \overrightarrow{QP}}{|\overrightarrow{QF}| |\overrightarrow{QP}|} = \frac{-2-2}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = -\frac{4}{5} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{又 } \overrightarrow{PQ} = (-2, -1), \overrightarrow{PR} = (2, -1)$$

$$\text{得 } \cos \angle QPR = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PR}|} = \frac{-4+1}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = -\frac{3}{5}。 \quad (3 \text{ 分})$$

20. (3)

出處：第二冊〈三角比〉

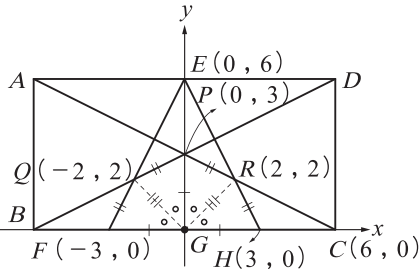
目標：以多個三角形面積計算進行探討

解析：在  $\triangle GFQ$ 、 $\triangle GPQ$ 、 $\triangle GPR$ 、 $\triangle GHR$  中

$$\therefore \overline{GF} = \overline{GP} = \overline{GH} = 3,$$

$$\overline{FQ} = \overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{RH} = \sqrt{5},$$

$$\overline{GQ} = \overline{GR} = 2\sqrt{2}$$



$$\therefore \triangle GFQ \cong \triangle GPQ \cong \triangle GPR \cong \triangle GHR \text{ (SSS 全等性質)}$$

$$\text{得 } \angle FGQ = \angle PGQ = \angle PGR = \angle HGR = 45^\circ$$

故五邊形  $FHRPQ$  面積

$$= \triangle GFQ \text{ 面積} + \triangle GPQ \text{ 面積} + \triangle GPR \text{ 面積}$$

$$+ \triangle GHR \text{ 面積}$$

$$= 4 \times \triangle GFQ \text{ 面積}$$

$$= 4 \times \frac{1}{2} \times \overline{GF} \times \overline{GQ} \times \sin 45^\circ$$

$$= 4 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12 \text{ 平方單位}$$

故選(3)。

[另解]

由對稱性可知，所求為

$$2 \times \text{四邊形 } GHRP \text{ 面積}$$

$$= 2(\triangle GHR \text{ 面積} + \triangle GPR \text{ 面積})$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \times 3 \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 \times 2\right) = 12 \text{ 平方單位}$$

故選(3)。



