

國立彰化高級中學 115 學年度科學班甄選入學 科學能力檢定 【數學科】 試題卷

※滿分 100 分

一、選擇題 (每題 4 分，共 12 分)

() 1. 已知某一矩形原來的寬與長之比為 11 : 13，現在將此矩形的寬與長都加上同一長度後，則其新矩形

寬與長之比值可為下列何者？ (1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{4}{5}$ (3) $\frac{6}{7}$ (4) $\frac{5}{8}$ (5) $\frac{9}{11}$

() 2. 設 x 的一元二次方程式 $x^2 + 2px + 2q = 0$ 有實根，其中 p 、 q 都是奇數，那麼它的根一定是

(1) 奇數 (2) 偶數 (3) 分數 (4) 無理數 (5) 以上皆有可能 (※註：無理數是不能寫成分數的實數)

() 3. 如果三數 a 、 b 、 c 成等差數列，則 x 的一元二次方程式 $ax^2 + 2bx + c = 0$ 恆有下列哪一根？

(1) -1 (2) 1 (3) -2 (4) 2 (5) 以上皆非

二、填充題 (4~13 題每格 6 分；14~17 題每格 7 分，共 88 分)

4. 已知 $a - b = m$ ($m \neq 0$)， $a^3 - b^3 = n$ ，試用 m 、 n 表示 $a^2 + b^2 =$ _____。

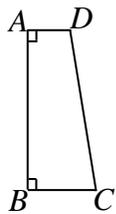
5. 解方程式 $(x - 2)(x - 3)(x + 6) = 36$ ，則實數 $x =$ _____。(全對才給分)

6. 已知一次函數的圖形通過點(2, 2)，它與兩座標軸所圍的三角形面積為 1，求此一次函數為_____。

(全對才給分)

7. 如下圖，梯形 $ABCD$ 中， \overline{AD} 平行 \overline{BC} ， $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 7$ ， $\overline{AD} = 2$ ， $\overline{BC} = 3$ 。

如果在 \overline{AB} 上的點 P 使得 $\triangle ADP$ 和 $\triangle BCP$ 這兩個三角形相似，求滿足題意的點 P 共有_____個。



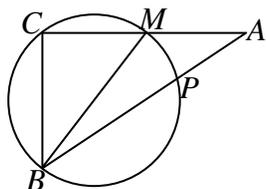
8. 以正整數 n 分別去除 13513、13905、14591 所得的餘數皆相同，求 n 的最大值為_____。

9. 已知二次函數 $y = a(x^2 - 8x + 12)$ 的圖形與 x 軸交於 A 、 B 兩點 (A 點在 B 點左邊)，此二次函數圖形上另一點 C

在第一象限，且使 $\triangle OCA \sim \triangle OBC$ (O 為原點)，設直線 \overleftrightarrow{BC} 與 y 軸交於 P 點，當 C 是 \overline{BP} 中點時，求 a

$=$ _____。

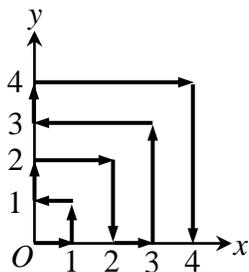
10. 如下圖，直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ 、 $\overline{AC}:\overline{BC}=3:2$ 且 \overline{AC} 的中點為 M ，若 $\triangle BCM$ 的外接圓與 \overline{AB} 交於一點 P ，試求 \overline{PA} 與 \overline{PB} 的比值為_____。



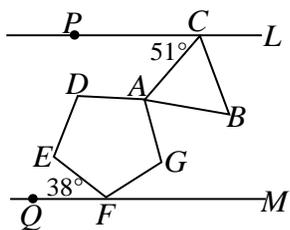
11. 「 $3n+1$ 猜想」至今仍是未解之謎。其規則簡單：任選一正整數為初始值，依照偶數除以 2，奇數則乘以 3 再加 1 的規則，如此一直運算下去，最終都能回到 1。比如： $6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ 。直到 2020 年，科學家已透過計算機驗證了高達 $2^{68} \approx 2.95 \times 10^{20}$ 的數值，尚未發現反例。
令 $f(m)$ 為從初始值 m 開始運算到 1 所經過的數值個數(含初始值 m 及 1)，比如： $f(6)=9$ 、 $f(3)=8$ 。試求： $f(17) =$ _____。

12. 有一款劣質口罩的病毒過濾效率僅為 40%，同時戴上 3 個口罩時，病毒過濾效率可以提升為_____%。

13. 一個粒子始終在第一象限內或坐標軸上作如右圖的移動，在第一分鐘內它由原點移到點(1, 0)之後，它接著按圖所示在與 x 軸和 y 軸平行的方向來回運動，每分鐘移動一個單位距離。在 2026 分鐘後，這個粒子所在的位置為何處？



14. 如下圖， L 平行 M ， $\triangle ABC$ 是正三角形， $ADEFG$ 是正五邊形， $\angle PCA=51^\circ$ 、 $\angle QFE=38^\circ$ ，求 $\angle BAG =$ _____度。



15. 若 P 為一質數，且 2026 個連續正整數之和恰等於 P^3 ，求此 2026 個正整數中最小者 = _____。

16. 五個正數 $1, a, b, c, \frac{12}{5}$ 中，前四數成等差，後三數成等比，試求 $b+c =$ _____。

17. 設大圓 C_1 、中圓 C_2 、小圓 C_3 相切在矩形內部如下圖，其中大圓 C_1 、中圓 C_2 的半徑分別為 4、1， C_2 與 C_3 分別與矩形右邊相切於 P 、 Q 兩點，試求 $\overline{PQ} =$ _____。

