

版權所有，翻印必究

115 學年度全國高級中學
學科能力測驗模擬考試

數學
考
科
參
考
答
案
暨
詳
解

數學

翰林出版事業股份有限公司



版權所有 · 翻印必究

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(3)	(3)	(5)	(4)	(3)	(1)	(3)(4)
8.	9.	10.	11.	12.		
(2)(3)(4)(5)	(1)(4)(5)	(2)(3)(4)	(2)(3)(5)	(1)(2)(3)(5)		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (3)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：理解斜率的定義，並能比較斜率的大小

解析：題圖中直線 AB 與直線 CD 斜率為負，其餘皆為正且直線愈接近鉛垂線，其斜率的絕對值也愈大可知直線 CD 的斜率最小，故選(3)。

2. (3)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：能利用配方法判斷圓方程式

解析：圓方程式中， x^2 及 y^2 係數必同號且係數相等

$\Rightarrow$ 刪去(1)(2)(5)，比較(3)(4)，

$$(3) \bigcirc : x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 2$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

得此方程式為圓心 $(-1, 1)$ ，半徑為 $\sqrt{2}$ 的圓

$$(4) \times : x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 0$$

得此方程式為 $(-1, 1)$ 的點，非一圓

故選(3)。

3. (5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：熟悉因式定理

解析：由於 $x^2 - x = x(x-1)$ ，故將 $x=0$ 與 $x=1$ 代入選項，值皆為 0 即為所求，則

$$(1) \times : x=1 \Rightarrow 1+1=2 \neq 0$$

$$(2) \times : x=1 \Rightarrow 1+1=2 \neq 0$$

$$(3) \times : x=1 \Rightarrow 1+1-1=1 \neq 0$$

$$(4) \times : x=1 \Rightarrow 1-1=0, x=0 \Rightarrow 0-1=-1 \neq 0$$

$$(5) \bigcirc : x=1 \Rightarrow 1-1=0, x=0 \Rightarrow 0-0=0$$

故選(5)。

4. (4)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：無理數的估計

解析：利用 $\sqrt{2025} = 45$ 可知當 $2020 \leq x \leq 2090$ 時， $\sqrt{x} \approx 45$ ，雖有誤差，但可先以此估計每個選項的數值，若數值接近再進行比較

$$(1) \sqrt{2020} - \sqrt{2020} \approx \sqrt{2020} - 45 = \sqrt{1975}$$

$$(2) \sqrt{2025} - \sqrt{2025} = \sqrt{2025} - 45 = \sqrt{1980}$$

$$(3) \sqrt{2050} - \sqrt{2050} \approx \sqrt{2050} - 45 = \sqrt{2005}$$

$$(4) \sqrt{2070} - \sqrt{2070} \approx \sqrt{2070} - 45 = \sqrt{2025}$$

$$(5) \sqrt{2090} - \sqrt{2090} \approx \sqrt{2090} - 45 = \sqrt{2045}$$

故選(4)。

5. (3)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：熟悉指數的計算

解析：依題意，假設 n 年之後，大腦中含有的塑膠微粒總重量約為五支塑膠湯匙的重量，且 2025 年初時的塑膠微粒總重量為 a

$$\text{列式為 } 1.5^{\frac{n}{8}} a \approx 5a, \text{ 且 } 1.5^3 = 3.375, 1.5^4 = 5.0625$$

$$\Rightarrow \frac{n}{8} \approx 4 \Rightarrow n \approx 32, \text{ 則 } 2025 + 32 = 2057, \text{ 故選(3)。}$$

6. (1)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：理解三次函數與其一次近似的圖形

解析：①將 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$ 改寫為

$$f(x) = (x-h)^3 + p(x-h) + k \text{ 的形式，}$$

$$\text{又 } h = -\frac{b}{3a} = -\frac{2}{3}, \text{ 連續利用綜合除法}$$

$$\text{得 } f(x) = \left(x + \frac{2}{3}\right)^3 - \frac{13}{3}\left(x + \frac{2}{3}\right) + \frac{43}{27}$$

為形如 $ax^3 + px$ ($a > 0, p < 0$) 平移的結果，故 $f(x)$ 之圖形應形如右圖



② $\because y = f(x)$ 在 $x = -2$ 附近的一次近似為 $g(x)$ ，連續利用綜合除法可得

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$$

$$= (x+2)^3 - 4(x+2)^2 + (x+2) + 5$$

$$\text{故 } g(x) = (x+2) + 5$$

$\because y = f(x)$ 在 $x = -2$ 附近的局部特徵近似於直線

$$y = g(x)$$

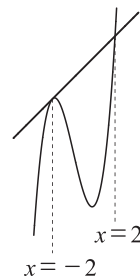
$\therefore$ 直線 $y = g(x)$ 在 $x = -2$ 時不會穿過 $y = f(x)$

$$\text{③解聯立 } \begin{cases} g(x) = (x+2) + 5 \\ f(x) = (x+2)^3 - 4(x+2)^2 + (x+2) + 5 \end{cases}$$

$$\text{可得 } (x+2)^3 - 4(x+2)^2 = 0 \Rightarrow (x+2)^2(x-2) = 0$$

故 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 $x=2$ 及 $x=-2$ 時有交點

綜上述判斷圖形如下



故選(1)。

二、多選題

7. (3)(4)

出處：第一冊〈數與式〉、第一冊〈指數、對數〉

目標：理解有理數的定義，並會計算根號與對數之值

解析：(1) $\times$ ： $\sqrt{2}$ 為無理數

$$(2) \times : \sqrt{7+2\sqrt{6}} = \sqrt{6} + 1 \text{ 為無理數}$$

$$(3) \bigcirc : \log 100 = \log 10^2 = 2 \text{ 為有理數}$$

$$(4) \bigcirc : \sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}}$$

$$= (\sqrt{6} + 1) - (\sqrt{6} - 1) = 2 \text{ 為有理數}$$

(5) $\times$ ： π 為無理數，故選(3)(4)。

8. (2)(3)(4)(5)

出處：第一冊〈數與式〉、第一冊〈指數、對數〉

目標：會解絕對值不等式，並計算 $\log$ 數值

解析： $|x - \pi| < 2.2 \Rightarrow \pi - 2.2 < x < \pi + 2.2$ ，取 $\pi \approx 3.142$ ，得
 $0.942 < x < 5.342$

(1) $\times$ ： $x = \log 1 = 0$ ，不滿足不等式

(2) $\circ$ ： $x = \log 9 \approx 0.9542$ (可從參考數值中取得)，滿足不等式

(3) $\circ$ ： $x = \log 28 \Rightarrow 10^x = 28$

由 $10^1 < 28 < 10^2 \Rightarrow 10^1 < 10^x < 10^2$ 可知
 $1 < x < 2$ ，滿足不等式

(4) $\circ$ ： $x = \log 2583 \Rightarrow 10^x = 2583$

由 $10^3 < 2583 < 10^4 \Rightarrow 10^3 < 10^x < 10^4$ 可知
 $3 < x < 4$ ，滿足不等式

(5) $\circ$ ： $x = \log 199999 \Rightarrow 10^x = 199999$

由 $10^5 < 199999 < 2 \times 10^5$
 $\Rightarrow 10^5 < 10^x < 10^{0.3010} \times 10^5 = 10^{5.3010}$ 可知
 $5 < x < 5.3010$ ，滿足不等式

故選(2)(3)(4)(5)。

9. (1)(4)(5)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：能對於直線的斜率做幾何判斷

解析：(1) $\circ$

(2) $\times$ ：若 $m_1 = m_2 = 0$ ，則有可能重合或平行

(3) $\times$ ：有可能重合

(4) $\circ$

(5) $\circ$ ：若 $m_1 \times m_2 < 0$ ，則必有一直線斜率為正，另一直線斜率為負

①直線斜率為正，必通過第一、三象限

②直線斜率為負，必通過第二、四象限

$\therefore$ 此兩條直線必通過四個象限

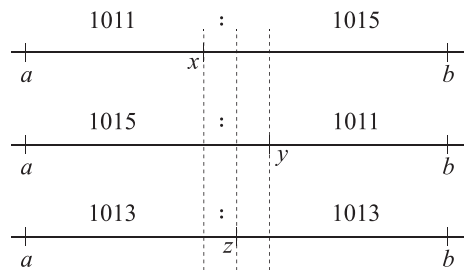
故選(1)(4)(5)。

10. (2)(3)(4)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：熟知分點公式與算幾不等式

解析：依題意，利用分點公式，作示意圖如下：



可知 $0 < a < x < z < y < b$

又根據算幾不等式，

當 $a \neq b$ 時， $z = \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} = w$

由 $y > z$ 且 $z > w$ 可得 $y > w$ ，

而 x, w 的大小無法判斷

故選(2)(3)(4)。

11. (2)(3)(5)

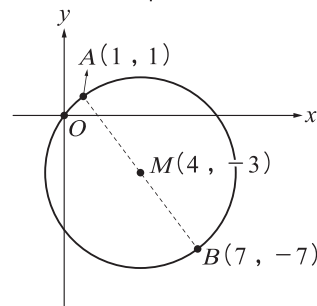
出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：利用圓心到直線距離，搭配幾何判斷

解析：令圓心 M 為 $\overline{AB}$ 中點，即 $M(4, -3)$

半徑 $r = \overline{MA} = \overline{MB} = \overline{OM} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

且 $m_{\overline{OM}} = -\frac{3}{4}$ ，作圖如下



(1) $\times$ ： $4x - 3y = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$ ，通過 $O(0, 0)$ 且與 $\overline{OM}$ 垂直 $\Rightarrow$ 相交於一點

(2) $\circ$ ： $123x + 456y = 0$ 通過 $O(0, 0)$ ，但此直線與 $\overline{OM}$ 不垂直 $\Rightarrow$ 相交於兩點

(3) $\circ$ ：令 $L_3: 4x - 3y - 4 = 0$

$$d(M, L_3) = \frac{|4 \times 4 - 3 \times (-3) - 4|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{21}{5} < 5$$

$\Rightarrow$ 相交於兩點

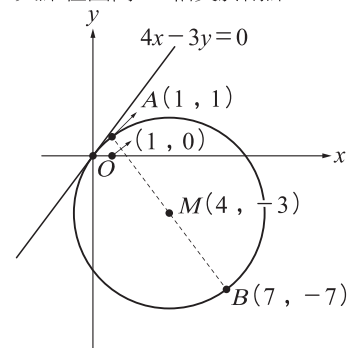
(4) $\times$ ：令 $L_4: 4x - 3y + 4 = 0$

$$d(M, L_4) = \frac{|4 \times 4 - 3 \times (-3) + 4|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{29}{5} > 5$$

$\Rightarrow$ 不相交

(5) $\circ$ ： $123x + 456y = 123$ 通過點 $(1, 0)$ ，

又點在圓內 $\Rightarrow$ 相交於兩點



故選(2)(3)(5)。

12. (1)(2)(3)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：熟知三次函數的運算與圖形

解析：(1) $\circ$ ：由 $f(x) + g(x) = 2x^3 - 2x^2$ 可知，

$g(x) = 2x^3 - 2x^2 - f(x)$ 且 $f(x)$ 的首項係數為 1，
 故可知 $g(x)$ 的首項係數必為 1

(2) $\circ$ ：由於 $f(x), g(x)$ 的首項係數皆為 1，則

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Rightarrow px^2 + qx + r = 0$$

因 $px^2 + qx + r = 0$ 至多為二次多項式且不為零多項式，因此最多只有兩個不同的解，不可能出現三個不同的解，故 f_1 與 f_2 不可能有三個不同的交點

(3) ○(4) ×：依題意，
 令 $f(x) = (x - a_1)^3 + s(x - a_1) + b_1$ ，
 $g(x) = (x - a_2)^3 + t(x - a_2) + b_2$ ，
 其中 s, t 為實數，展開後相加可得
 $f(x) + g(x)$
 $= 2x^3 - 3(a_1 + a_2)x^2 + (3a_1^2 + 3a_2^2 + s + t)x$
 $+ (-a_1^3 - a_2^3 - sa_1 - ta_2 + b_1 + b_2)$
 比較係數可得

$$\begin{cases} -3(a_1 + a_2) = -2 \\ 3a_1^2 + 3a_2^2 + s + t = 0 \\ -a_1^3 - a_2^3 - sa_1 - ta_2 + b_1 + b_2 = 0 \end{cases}$$

 即 $a_1 + a_2 = \frac{2}{3}$ 為定值， $b_1 + b_2$ 無法確定

(5) ○：承(3)、(4)，若 $a_1 = a_2$ ，可得

$$\begin{cases} -6a_1 = -2 \\ 6a_1^2 + s + t = 0 \\ -2a_1^3 - (s + t)a_1 + b_1 + b_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ s + t = -6a_1^2 \\ b_1 + b_2 = 2a_1^3 + (s + t)a_1 \end{cases}$$

 則 $b_1 + b_2 = 2a_1^3 + (s + t)a_1 = 2a_1^3 - 6a_1^3$
 $= -\frac{4}{27} < 0$

故選(1)(2)(3)(5)。

三、選填題

13. 6

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：能計算多項式不等式的解

解析： $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7)x^2$

$$\leq (x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7)$$

$$\Rightarrow (x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7)(x^2 - x + 1) \leq 0$$

考慮每個因式的正負號，

又 $x^2 - x + 1$ 恆正 (因為首項係數 $1 > 0$ 且判別式

$$b^2 - 4ac < 0)$$

可得下表

x	$(-\infty, -7)$	$(-7, -5)$	$(-5, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, \infty)$
$x + 1$	—	—	—	—	+
$x + 3$	—	—	—	+	+
$x + 5$	—	—	+	+	+
$x + 7$	—	+	+	+	+
$x^2 - x + 1$	+	+	+	+	+
$(x + 1)(x + 3)$					
$(x + 5)(x + 7)$	+	—	+	—	+
$(x^2 - x + 1)$					

故解為 $-7 \leq x \leq -5$ 或 $-3 \leq x \leq -1$

$$\Rightarrow x = -7, -6, -5, -3, -2, -1$$

共 6 個整數解。

14. $-\frac{2}{3}$

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：理解二次函數圖形的平移並能處理圖形關係

解析：設將二次函數 $f(x) = 3x^2 + 4x + k$ 的圖形向右平移一單位，再向上平移兩單位後為 $g(x)$ 的圖形
 則 $g(x) = 3(x - 1)^2 + 4(x - 1) + k + 2$
 $= 3x^2 - 2x + k + 1$
 因為 $g(x)$ 的圖形與 x 軸相切，
 故判別式 $D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 3 \times (k + 1) = 0$
 解得 $k = -\frac{2}{3}$ 。

15. (3, -2)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：能求點到直線的垂足坐標

解析：當 $\overline{AP}$ 有最小值時， $\overline{AP} \perp L$ ，即 P 點為 A 到直線 L 的垂足點

設直線 $M: 3x + 2y = k$ 為通過 A 點且垂直 L 的直線

將 $A(1, 1)$ 代入可得 $k = 5$

$$\text{解聯立可得 } \begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

故 $P(3, -2)$ 為所求。

16. 641

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：熟悉綜合除法的應用

解析：先計算各位係數相減

	5	4	3	2	1
—	1	10	12	8	6
—	3	5	12	9	4
	1	-11	-21	-15	-9

可知所求之值為

$$1 \times 13^4 - 11 \times 13^3 - 21 \times 13^2 - 15 \times 13 - 9$$

$$\text{設 } f(x) = x^4 - 11x^3 - 21x^2 - 15x - 9$$

所求為 $f(13)$

利用餘式定理改為計算 $f(x)$ 除以 $x - 13$ 的餘式

1	-11	-21	-15	-9	13
	+13	+26	+65	+650	
1	+2	+5	+50	+641	

如上式可知所求為 $f(13) = 641$ 。

17. (4, 4, 3)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：利用一次近似假設原三次函數，並利用條件求得其解

解析：若將三次函數 $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ 改寫為

$$f(x) = 2(x + 1)^3 + s(x + 1)^2 + t(x + 1) + u$$

依題意其一次近似為 $t(x + 1) + u = 2x + 3$ ，則

$$\begin{cases} y = 2(x + 1)^3 + s(x + 1)^2 + 2x + 3 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(x + 1)^3 + s(x + 1)^2 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2(2x + 2 + s) = 0$$

且 $y = g(x)$ 與 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 時還有一個交點

故將 $x = 0$ 代入 $2x + 2 + s$ 其值為零，即 $s = -2$

由上述可知

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$= (x + 1)^2 \cdot 2x + 2x + 3 = 2x^3 + 4x^2 + 4x + 3$$

即所求序組 $(a, b, c) = (4, 4, 3)$ 。

18. (3)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：判斷二元一次不等式的圖形

解析：如題圖，

有色區域在 $x-y+1=0$ 的右側，故滿足 $x-y+1\geq 0$

有色區域在 $2x+y-1=0$ 的左側，故滿足 $2x+y-1\leq 0$

故選(3)。

19. $\frac{9\pi}{5}$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：能使用點到直線的距離公式

解析：由題圖知，當圓與直線 $L:x-y+1=0$

或直線 $M:2x+y-1=0$ 相切時

比較兩圓半徑大小，其中較小的半徑可使圓在有色區域內有最大面積，較大的半徑則會超出有色區域

計算 $d(A,L)=\frac{|0+2+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=2.1\cdots\cdots$ ，

$d(A,M)=\frac{|0-2-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=1.3\cdots\cdots$

則 $\frac{3}{\sqrt{5}}<\frac{3}{\sqrt{2}}\Rightarrow d(A,M)<d(A,L)$

故此圓最大面積為 $\pi(d(A,M))^2=\frac{9\pi}{5}$ 。

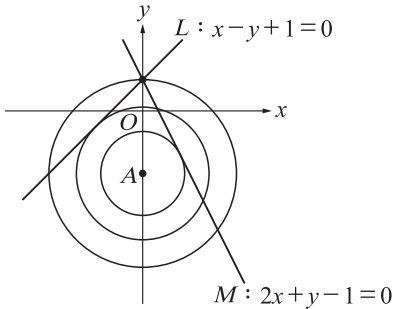
20. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 或 3

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：能判斷幾何圖形的交點並利用距離公式解決問題

解析：由 19. 題知 $d(A,M)<d(A,L)$

可畫出下圖，並判斷下列兩種情形滿足題意



①圓與直線 $L:x-y+1=0$ 相切時，

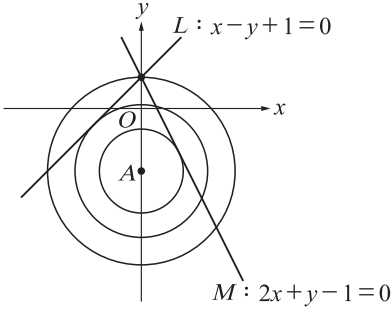
此時半徑為 $d(A,L)=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

②圓通過兩直線交點 $\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 時，

此時半徑為 3

由①、②知，故此圓所有可能的半徑為 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 或 3。

由 19. 題知 $d(A,M)<d(A,L)$
可畫出下圖，並判斷下列兩種情形滿足題意



①圓與直線 $L:x-y+1=0$ 相切時，

此時半徑為 $d(A,L)=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (3 分)

②圓通過兩直線交點 $\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 時，

此時半徑為 3 (3 分)

由①、②知，故此圓所有可能的半徑為 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 或 3。(1 分)

