版權所有，翻印必究

114 學年度全國高級中學

學科能力測驗模擬考試

# 數學考科參考答案暨詳解



翰林出版事業股份有限公司

99362114-34

版權所有・翻印必究

版權所有，翻印必究

# 數學考科詳解

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | (4) | (3) | (4) | (2) | (5) | (1)(5) |
| 8. | 9. | 10. | 11. | 12. | | |
| (1)(2)(4) | (3)(5) | (1)(3)(4) | (2)(5) | (1)(2) | | |

## 第壹部分、選擇（填）題

### 一、單選題

1. (1)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：絕對值不等式及解的區間表示

解析：不等式 $3\le|x+a|<5$

$\Rightarrow -5<x+a\le -3$ 或 $3\le x+a<5$

$\Rightarrow -a-5<x\le -a-3$ 或 $-a+3\le x<-a+5$

用區間表示為 $(-a-5,-a-3]$ 或 $[-a+3,-a+5)$

$\Rightarrow -a+3=-4$

$\Rightarrow a=7$

則另一個區間為 $(-12,-10]$

故選(1)。

2. (4)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：分數指數的定義及指數律的應用

解析：$a=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$，$b=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$，$c=\sqrt[6]{6}=6^{\frac{1}{6}}$

$\Rightarrow a=2^{\frac{1}{2}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{6}}$，$b=3^{\frac{1}{3}}=(3^2)^{\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{6}}$，$c=6^{\frac{1}{6}}$

因此 $c<a<b$

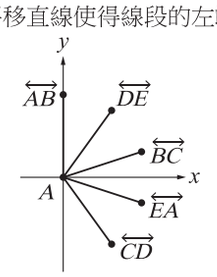
故選(4)。

3. (3)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線的斜率

解析：如下圖，平移直線使得線段的左端點與原點重合




其中 $\overleftrightarrow{AB}$ 斜率不存在，其餘由上至下，斜率愈來愈小

因此，$\overleftrightarrow{CD}$ 的斜率最小

故選(3)。

4. (4)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：利用分點公式計算線段的長度

解析：因為 $B$ 是 $A$，$D$ 的內分點且 $\overline{AB}:\overline{BD}=1:2$

由分點公式可知 $b=\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}d$

同理可得，$c=\frac{2}{5}a+\frac{3}{5}d$

因為 $\overline{BC}=|b-c|=\frac{4}{15}|a-d|=\frac{4}{15}\overline{AD}$

所以 $\overline{AD}=\frac{15}{4}\overline{BC}=15$

故選(4)。

5. (2)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：能正確使用除法原理求餘式

解析：由除法原理知 $f(x)=g(x)x+x$

當 $f(x)$ 除以 $x$ 時，$f(x)=x(g(x)+1)+0$

因此餘式為 0

故選(2)。

6. (5)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：兩平行直線的距離

解析：若兩條平行直線為水平線或是鉛垂線，則距離皆為 5

所以不可能為水平線或是鉛垂線

因此可假設兩直線為 $y=mx+k_1$ 及 $y=mx+k_2$ 且分別通過 $(6,4)$ 及 $(11,9)$，其中 $m$ 為非零實數，$k_1$，$k_2$ 為實數且 $k_1\neq k_2$

$\Rightarrow\begin{cases}4=6m+k_1\\9=11m+k_2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}k_1=4-6m\\k_2=9-11m\end{cases}$

兩平行直線的距離為 $\frac{|k_1-k_2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$\Rightarrow\frac{|(4-6m)-(9-11m)|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|5m-5|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$\Rightarrow 25m^2-50m+25=m^2+1$

$\Rightarrow 12m^2-25m+12=0$

$\Rightarrow (3m-4)(4m-3)=0$

$\Rightarrow m=\frac{4}{3}$ 或 $\frac{3}{4}$

故選(5)。

### 二、多選題

7. (1)(5)

出處：第一冊〈數與式〉、第一冊〈指數、對數〉

目標：對數與科學記號及雙重根號拆解

解析：(1)○：$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}$

$=\sqrt{(4+3)+2\sqrt{4\times3}}$

$=\sqrt{4}+\sqrt{3}$

$=2+\sqrt{3}$

$\approx 2+1.732$

$=3.732$

$\log a$ 的整數部分為 3

(2)╳：承(1)，小數部分為 $2+\sqrt{3}-3=\sqrt{3}-1$

(3)╳：$\log a=2+\sqrt{3}\approx 3.732$

$\Rightarrow a\approx 10^{0.732}\times 10^3$，其中 $1\le 10^{0.732}<10$

$\Rightarrow a$ 的整數部分為 4 位數

(4)╳：承(1)，$\log a=2+\sqrt{3}$

$\Rightarrow a=10^{2+\sqrt{3}}$

$\Rightarrow a^2=10^{4+2\sqrt{3}}\approx 10^{7.464}$

$\Rightarrow \log a^2=4+2\sqrt{3}\approx 7.464$

(5)○：承(4)，$a^2$ 的整數部分為 8 位數

故選(1)(5)。

版權所有，翻印必究

8. ⑴⑵⑷

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：高次不等式

解析：$(x^3+1)(x^2-2)<x(x^3+1)$

$\Rightarrow (x^3+1)(x^2-2)-x(x^3+1)<0$

$\Rightarrow (x^3+1)(x^2-x-2)<0$

$\Rightarrow (x+1)(x^2-x+1)(x+1)(x-2)<0$

$\Rightarrow (x+1)^2(x^2-x+1)(x-2)<0$

又 $x^2-x+1$ 首項係數為 $1>0$

且判別式 $(-1)^2-4\times1\times1=-3<0$

所以 $x^2-x+1$ 恆正

| $x$ | $(\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,2)$ | $2$ | $(2,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(x+1)^2$ | ＋ | 0 | ＋ | ＋ | ＋ |
| $x^2-x+1$ | ＋ | ＋ | ＋ | ＋ | ＋ |
| $x-2$ | － | － | － | 0 | ＋ |
| $f(x)$ | － | 0 | － | 0 | ＋ |

故選⑴⑵⑷。

9. ⑶⑸

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：二元一次不等式的解區域判斷

解析：$(x+1)^2-(y-2)^2=0$

$\Rightarrow (x+y-1)(x-y+3)=0$

$\Rightarrow (x+1)^2-(y-2)^2=0$ 的圖形為兩直線

令 $L_1: x+y-1=0$，$L_2: x-y+3=0$

因為 $0+0-1<0$，$0-0+3>0$

所以原點 $(0,0)$ 在 $L_1$ 左側且在 $L_2$ 右側

⑴✗：代入 $L_1$：$1+2-1=2>0$

代入 $L_2$：$1-2+3=2>0$

$(1,2)$ 在 $L_1$ 右側且在 $L_2$ 右側

⑵✗：代入 $L_1$：$0+2-1=1>0$

代入 $L_2$：$0-2+3=1>0$

$(0,2)$ 在 $L_1$ 右側且在 $L_2$ 右側

⑶○：代入 $L_1$：$(-1)+1-1=-1<0$

代入 $L_2$：$(-1)-1+3=1>0$

$(-1,1)$ 在 $L_1$ 左側且在 $L_2$ 右側

⑷✗：代入 $L_1$：$(-2)+2-1=-1<0$

代入 $L_2$：$(-2)-2+3=-1<0$

$(-2,2)$ 在 $L_1$ 左側且在 $L_2$ 左側

⑸○：代入 $L_1$：$(-2)+0-1=-3<0$

代入 $L_2$：$(-2)-0+3=1>0$

$(-2,0)$ 在 $L_1$ 左側且在 $L_2$ 右側

故選⑶⑸。

10. ⑴⑶⑷

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數圖形的對稱中心及一次近似

解析：⑴○：$f(-0.999)=(-0.999+1)^3-3(-0.999+1)^2+1$

$=(0.001)^3-3(0.001)^2+1\approx0.99$

四捨五入至整數為 1

⑵✗：$f(x)=(x^3+3x^2+3x+1)-3(x^2+2x+1)+1$

$=x^3-3x-1$

對稱中心為 $(0,-1)$

⑶○：承⑵，向上平移 1 單位後得

$y=x^3-3x=x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

與 $x$ 軸交於 $(0,0)$，$(\sqrt{3},0)$，$(-\sqrt{3},0)$ 三點

⑷○：承⑵，連續利用綜合除法可得

$f(x)=x^3-3x-1=(x-1)^3+3(x-1)^2-3$

⑸✗：承⑷，

$y=f(x)$ 在 $x=1$ 附近的一次近似為 $y=-3$

故選⑴⑶⑷。

11. ⑵⑸

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：二次函數的特徵

解析：⑴✗：若 $f(x)=2x^2$，則 $g(x)=x^2+x+2$，與 $g(x)$ 為一次多項式矛盾

⑵○：若 $g(x)=2x$，則 $f(x)=x^2+x-2$，符合條件

⑶✗：因為 $f(x)=g(x)+x^2-x-2$，又 $g(x)$ 為一次多項式

所以 $f(x)$ 的首項係數為正，因此圖形為開口向上的拋物線

⑷✗：若 $(p,q)$ 為 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 兩圖形的交點，

則 $f(p)-g(p)=0$

$\Rightarrow p$ 為 $x^2-x-2=0$ 的解

反之，若 $p$ 為 $x^2-x-2=0$ 的解，則 $f(p)=g(p)$

$\Rightarrow (p,f(p))$ 為兩圖形的交點

因為 $x^2-x-2=0$ 有解，所以兩圖形必有交點

⑸○：令 $g(x)=ax+b$

$\Rightarrow f(x)=x^2+(a-1)x+(b-2)$

若 $y=f(x)$ 的圖形恆在 $x$ 軸上方，

則 $(a-1)^2-4(b-2)<0$

取 $a=1$，$b=3$ 即可

故選⑵⑸。

12. ⑴⑵

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：能利用中垂線、切線、弦心距的特性解題

解析：⑴○：小半圓的直徑 $AB$ 為大半圓的弦且大半圓圓心為 $(0,0)$

又弦的中垂線必過圓心 $O(0,0)$

因此線段 $AB$ 的中垂線必過原點

⑵○：承⑴，$\overline{AB}$ 的中垂線過 $(0,0)$ 且與 $\overline{AB}$ 垂直

$\Rightarrow \overline{AB}$ 的中垂線為 $y=-2x$

所以小半圓圓心（$\overline{AB}$ 中點）落在直線 $y=-2x$ 上

⑶✗：$L: y=\frac{1}{2}x+k \Rightarrow x-2y+2k=0$

原點 $O(0,0)$ 到直線 $L$ 的距離為

$\frac{|0-2\times0+2k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{2|k|}{\sqrt{5}}$

⑷✗：設小半圓半徑為 $r \Rightarrow \overline{O'P}=r$

$\Rightarrow O'$ 的 $y$ 坐標為 $r$

由⑵的結果可設 $O'\left(\frac{-r}{2},r\right)$

$\Rightarrow \overline{OO'}^2=\left(\frac{-r}{2}\right)^2+r^2=\frac{5r^2}{4}$

版權所有，翻印必究

又△$OO'B$ 是一直角三角形，則 $\overline{OO'}^2+r^2=2^2$

$\Rightarrow \frac{5r^2}{4}+r^2=4$

$\Rightarrow r=\frac{4}{3}$ 或 $-\frac{4}{3}$ (不合)

⑸ ╳：承⑶、⑷，

$\overline{OO'}^2=\left(\frac{2|k|}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{4k^2}{5}=\frac{5r^2}{4}=\frac{5}{4}\times\frac{16}{9}=\frac{20}{9}$

$\Rightarrow k=\frac{5}{3}$ 或 $-\frac{5}{3}$ (不合)

故選⑴⑵。

**三、選填題**

13. 19

出處：第一冊〈數與式〉

目標：乘法公式與根式有理化

解析：因為 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

又 $\frac{1}{x}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

$\Rightarrow x+\frac{1}{x}=4$

所以 $x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1$

$=16-2+4+1$

$=19$。

14. $5\sqrt{5}$

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：熟悉指數律及根式的表達

解析：$a^6=b^3=5$

$\Rightarrow a=5^{\frac{1}{6}}$，$b=5^{\frac{1}{3}}$

$(a^{\sqrt{3}}\times b^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}=[(ab)^{\sqrt{3}}]^{\sqrt{3}}=\left[(5^{\frac{1}{6}}\times 5^{\frac{1}{3}})^{\sqrt{3}}\right]^{\sqrt{3}}$

$=(5^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}})^{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=(5^{\frac{1}{2}})^3=5^{\frac{3}{2}}=\sqrt{5^3}=5\sqrt{5}$ 。

15. (2 , 1)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：多項式的四則運算

解析：

$$\begin{array}{r|l} & ax\ -\ 1 \\ \hline x^2+x+3 & ax^3+b\,x^2+5\,x-3 \\ & ax^3+a\,x^2+3a\,x \\ \hline & (b-a)\,x^2+(5-3a)\,x-3 \\ & -\quad x^2-\quad\ x-3 \\ \hline & 0 \end{array}$$

則 $\begin{cases} b-a=-1 \\ 5-3a=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

故數對 $(a\,,\,b)=(2\,,\,1)$。

16. 14

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：餘式定理及連續綜合除法的應用

解析：由餘式定理知 $f(11)$ 為 $f(x)$ 除以 $(x-11)$ 的餘式

又連續利用綜合除法可得

$f(x)=(x-11)^3+2(x-11)^2+(x-11)+(1100+a)$

$\Rightarrow f(11)=1100+a=10$

故 $f(12)=(12-11)^3+2(12-11)^2+(12-11)+(1100+a)$

$=1+2+1+(1100+a)$

$=14$。

17. $2\sqrt{2}$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓方程式

解析：$x^2+y^2-4kx+2ky+5k^2-2k-2=0$

$\Rightarrow (x^2-4kx+4k^2)+(y^2+2ky+k^2)$

$=-5k^2+2k+2+4k^2+k^2=2k+2$

$\Rightarrow (x-2k)^2+(y+k)^2=(\sqrt{2k+2})^2$

為圓心在 $(2k\,,-k)$，半徑為 $\sqrt{2k+2}$ 的圓

$\Rightarrow k=3$

故圓的半徑為 $\sqrt{2\times 3+2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ 。

**第貳部分、混合題或非選擇題**

18. ⑶⑸

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：二次函數的圖形

解析：因為最高點為 (0 , 4)

所以可假設軌跡滿足 $y=ax^2+4$

又因為軌跡從 $(-2\,,\,0)$ 出發

所以代入後得 $0=4a+4$

$\Rightarrow a=-1$

$\Rightarrow$ 軌跡方程式為 $y=-x^2+4$

①將 $x=-1$ 代入可得 $-(-1)^2+4=3$

選項⑶合

②將 $x=1$ 代入可得 $-(1)^2+4=3$

選項⑸合

故選⑶⑸。

19. $\frac{-x^2-1}{x-2}$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：斜率

解析：球的軌跡為 $y=-x^2+4$

$\Rightarrow P$ 點為 $(x\,,-x^2+4)$

故連線段斜率為 $\frac{-x^2+4-5}{x-2}=\frac{-x^2-1}{x-2}$ 。

◎評分原則

| |
|---|
| 球的軌跡為 $y=-x^2+4$ |
| $\Rightarrow P$ 點為 $(x\,,-x^2+4)$　(2 分) |
| 故連線段斜率為 $\frac{-x^2+4-5}{x-2}=\frac{-x^2-1}{x-2}$ 。　(2 分) |

20. $-4+2\sqrt{5}$

出處：第一冊〈數與式〉

目標：算幾不等式

版權所有，翻印必究

解析：令 $t=2-x \Rightarrow x=2-t$

斜率為 $\dfrac{-x^2-1}{x-2}=\dfrac{x^2+1}{2-x}=\dfrac{(2-t)^2+1}{t}=\dfrac{t^2-4t+5}{t}$

$=-4+\left(t+\dfrac{5}{t}\right)$

由算幾不等式得 $\dfrac{t+\dfrac{5}{t}}{2}\geq\sqrt{t\times\dfrac{5}{t}}=\sqrt{5}$

$\Rightarrow t+\dfrac{5}{t}\geq 2\sqrt{5}$

斜率為 $-4+\left(t+\dfrac{5}{t}\right)\geq -4+2\sqrt{5}$

故斜率的最小值為 $-4+2\sqrt{5}$ 。

◎評分原則

令 $t=2-x \Rightarrow x=2-t$

斜率為 $\dfrac{-x^2-1}{x-2}=\dfrac{x^2+1}{2-x}=\dfrac{(2-t)^2+1}{t}=\dfrac{t^2-4t+5}{t}$

$=-4+\left(t+\dfrac{5}{t}\right)$ (2 分)

由算幾不等式得 $\dfrac{t+\dfrac{5}{t}}{2}\geq\sqrt{t\times\dfrac{5}{t}}=\sqrt{5}$ (3 分)

$\Rightarrow t+\dfrac{5}{t}\geq 2\sqrt{5}$

斜率為 $-4+\left(t+\dfrac{5}{t}\right)\geq -4+2\sqrt{5}$

故斜率的最小值為 $-4+2\sqrt{5}$ 。 (1 分)

版權所有，翻印必究

版權所有，翻印必究

版權所有，翻印必究