

版權所有，翻印必究

114 學年度全國高級中學

分科測驗模擬考試

數學甲考科 A 卷

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

—作答注意事項—

考試範圍：第一～二冊、數學 A 第三～四冊、選修數學甲(極限與函數、微分、積分、複數與多項式方程式)

考試時間：80 分鐘

作答方式：

- 選擇(填)題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶(液)。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正帶(液)。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上的第 18-1

列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 18-2 列的 $\overset{8}{\square}$ 劃記，如：

18-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
18-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{19-1} \textcircled{19-2}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 \square 與

第 19-2 列的 $\overset{7}{\square}$ 劃記，如：

19-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

選擇(填)題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

祝考試順利



版權所有 · 翻印必究

第壹部分、選擇（填）題（占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

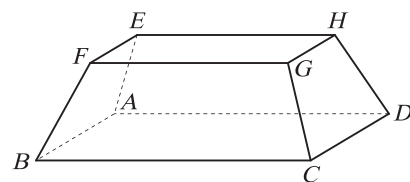
說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

1. 右圖為一個梯形臺地 $ABCD-EFGH$ ，其中長方形 $ABCD$ 與長方形 $EFGH$ 平行，等腰梯形 $ABFE$ 與等腰梯形 $DCGH$ 全等，等腰梯形 $ADHE$ 與等腰梯形 $BCGF$ 全等。若

$$\vec{AB} = (10, 0, 0), \vec{AD} = (0, 50, 0), \vec{AE} = (2, 7, 14),$$

則 \vec{AG} 為下列哪一個選項？

- (1) $(8, 43, 14)$
- (2) $(10, 50, 14)$
- (3) $(12, 57, 14)$
- (4) $(8, 43, 0)$
- (5) $(10, 43, 14)$



2. 坐標平面上，已知 $\vec{AB} = 8\vec{u}$ ， $\vec{AC} = 3\vec{u} + 4\vec{v}$ ， $\vec{AD} = 12\vec{v}$ ，若凸四邊形 $ABCD$ 的面積為 272，則 \vec{u} 與 \vec{v} 所決定的平行四邊形面積為下列哪一個選項？

- (1) 2
- (2) 4
- (3) 6
- (4) 8
- (5) 10

3. 小淳打算購買以下四種商品：200 元的士兵人偶，100 元的村民人偶，500 元的商鋪，500 元的馬車，每種商品皆無限量供應，且每種商品皆至少買一個，總金額恰為 3000 元。試問小淳共有多少種購買的方式？

- (1) 43 種
- (2) 44 種
- (3) 45 種
- (4) 46 種
- (5) 47 種

二、多選題 (占 40 分)

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

4. 已知 a, b, m, n 皆為實數，且 $i = \sqrt{-1}$ ，若 $(a + bi)(\sin 40^\circ + i \cos 40^\circ) = m + ni$ ，試選出正確的選項。

(1) $\begin{bmatrix} \cos 40^\circ & -\sin 40^\circ \\ \sin 40^\circ & \cos 40^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} \cos 50^\circ & -\sin 50^\circ \\ \sin 50^\circ & \cos 50^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 50^\circ & -\sin 50^\circ \\ \sin 50^\circ & \cos 50^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} \cos 50^\circ & -\sin 50^\circ \\ \sin 50^\circ & \cos 50^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} \cos 50^\circ & \sin 50^\circ \\ -\sin 50^\circ & \cos 50^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

5. 水木大學中只有三個學院：理學院、工學院、農學院。從水木大學中隨機選取一名學生，且每位學生被選取到的機會均等。令事件 A ：該學生為理學院；事件 B ：該學生為工學院；事件 C ：該學生為農學院；事件 D ：該學生為女性；事件 E ：該學生為男性。

學院 \ 性別	理學院	工學院	農學院
男學生人數	360	580	b
女學生人數	a	870	180

已知 $P(D) = P(D|A) = P(D|B) = P(D|C)$ ，若各個學院的男、女學生人數如上表，試選出正確的選項。

(1) $P(D \cap B) = P(D) \times P(B)$

(2) $P(E|A) = P(E|B)$

(3) $\frac{n(A \cap E)}{n(A \cap D)} = \frac{n(B \cap E)}{n(B \cap D)} = \frac{n(C \cap E)}{n(C \cap D)}$

(4) $a = 560$

(5) $b = 120$

6. 已知多項式 $f(x) = x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7$ ，其中 x 為實數，試選出正確的選項。

- (1) $f(x)$ 除以 $(x+1)$ 的餘式為 28
- (2) $f(1) - f(-1) = 24$
- (3) $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 附近的一次近似為 $y = 56(x - 1) + 28$
- (4) $f(x)$ 除以 $(x+1)^2$ 的商式為 $x^4 + 2x^2 + 3$
- (5) $f(x)$ 除以 $(x+1)^2$ 的餘式為 $2x + 6$

7. 累進費率即「停車時間累積越久，每小時的費率越高」之停車計費方式，適用於停車需求殷切之區域，期藉以價制量的方式提高停車位轉換率。已知某城市累進費率的計算方式如下：

- 一、停車時數以無條件進位法計算至整數。
- 二、第 1 小時 40 元；第 2~3 小時每小時 50 元；第 4 小時以上每小時 60 元。

則停車 x 小時的費用可以用函數 $f(x) = -a[-x] - b \left[\frac{-x+1-|x-1|}{2} \right] - c \left[\frac{-x+3-|x-3|}{2} \right]$

表示，其中高斯函數 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數。例如停車 2 小時的停車費為 90 元，而停車 2 小時又 1 秒的停車費則為 140 元。試選出正確的選項。

- (1) $\lim_{x \rightarrow 6^+} (-[-x]) = 6$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 6^+} \left(- \left[\frac{-x+3-|x-3|}{2} \right] \right) = 4$
- (3) $a = 40$
- (4) $b = 10$
- (5) $c = 60$

8. 若 $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$, $b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, 其中 n 為正整數, 試選出正確的選項。

(1) $a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(2) $b_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$

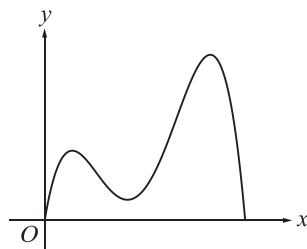
(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = 2$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{3}{2}$

三、選填題 (占 18 分)

說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分。

9. 小淳參加電腦繪圖數學競賽，繪圖時只能輸入函數，以函數圖形呈現繪圖作品。如右圖為函數 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 在 x 介於 $0 \sim 7.263$ 之間所呈現的山，其中 $f'(1) = f'(3) = f'(6) = 0$, $f(0) = 0$,



$f(6) = 6$, 則 $a = \frac{\textcircled{9-1} \textcircled{9-2}}{\textcircled{9-3} \textcircled{9-4}}$ 。(化為最簡分數)

10. 已知 a, b, c 皆為實數，且 $a^2 + b^2 + c^2 + 6a + 12b + 4c = 0$, 則 $2a + b + 2c + 4$ 的最大值為

 $\textcircled{10}$ 。

11. 已知直線 $L_1: 2x - y = 2$ 的斜率為 m_1 , 直線 L_2 的斜率為 m_2 。若 $0 < m_2 < m_1$, 且直線 L_1 與

L_2 的夾角為 30° , 則 $m_2 = \frac{\textcircled{11-1} \sqrt{\textcircled{11-2}} - \textcircled{11-3}}{\textcircled{11-1}}$ 。(化為最簡根式)

第貳部分、混合題或非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有 2 題組，單選題每題 3 分，選填題每題 3 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇（填）題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12-14 題為題組

已知一數列 $\langle a_n \rangle$ 符合以下兩個性質：

一、數列 $\langle 2^{a_n} \rangle$ 為等比數列，公比為 8。

二、 $\log a_3, \log a_7, \log a_{13}, \log a_k$ 此四數依序成等差數列。

請利用以上資訊回答下列問題。

12. 關於數列 $\langle a_n \rangle$ 的敘述，試選出正確的選項。(單選題，3 分)

- (1) $\langle a_n \rangle$ 為等比數列，公比為 8
- (2) $\langle a_n \rangle$ 為等比數列，公比為 3
- (3) $\langle a_n \rangle$ 為等差數列，公差為 8
- (4) $\langle a_n \rangle$ 為等差數列，公差為 3
- (5) $\langle a_n \rangle$ 不為等差數列，亦不為等比數列

13. 試求 $a_7 = \frac{\textcircled{13-1} \textcircled{13-2}}{\quad}$ 。(選填題，3 分)

14. 試求 $k = ?$ (非選擇題，6 分)

15-17 題為題組

xy 平面上， Ω 為位於 x 軸上方的封閉幾何圖形，且 Ω 的幾何中心為 P 點。若 Ω 繞 x 軸旋轉一圈所得的旋轉體體積為 V ， P 點繞 x 軸旋轉一圈所得的圓周長度為 L ，若 Ω 的面積為 T ，則 $V=TxL$ ，此稱為帕普斯幾何中心定理。請利用以上資訊回答下列問題。

15. xy 平面上有一長方形 $ABCD$ 的頂點坐標依序為 $A(0, 0)$ 、 $B(2, 0)$ 、 $C(2, 6)$ 、 $D(0, 6)$ ，其幾何中心為 $P(1, 3)$ ，試利用帕普斯幾何中心定理以外的方法求長方形 $ABCD$ 繞 x 軸旋轉一圈所得到的旋轉體體積，並驗證是否與帕普斯幾何中心定理計算出來的答案相符。(非選擇題，4 分)

16. xy 平面上有一個圓 $\Omega: x^2 + (y-7)^2 = 3^2$ ，其幾何中心為圓心 $Q(0, 7)$ 。已知圓 Ω 繞 x 軸旋轉一圈所得的旋轉體為一個甜甜圈，則此甜甜圈的體積 V 為何？(非選擇題，4 分)

17. 已知半徑為 r 的球的體積為 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 。 xy 平面上有 $E(-6, 0)$ 、 $F(6, 0)$ 兩點，且 $y = \sqrt{36-x^2}$ 與 \overline{EF} 所圍成的封閉區域 Γ 為上半圓，若 Γ 的幾何中心為 $R(0, a)$ ，則 $a = ?$ (非選擇題，4 分)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和： $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ； $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

4. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

5. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$,

算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ；標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n\mu_X^2}$

6. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$,

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

最適直線 (迴歸直線) 方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

7. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

8. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 5 \approx 0.6990$ ， $\log 7 \approx 0.8451$