114 學年度全國高級中學

分科測驗模擬考試

數學甲考科A卷參考答案暨詳解

翰林出版事業股份有限公司

99362617-34

114-E6

數學甲考科A卷詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(1)	(4)	(1)	(2)(5)	(1)(2)(3)(5)	(2)(3)(4)	(2)(3)(4)
8.						
(2)(4)(5)						

第壹部分、選擇（填）題

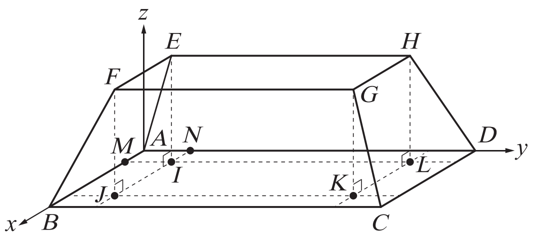
一、單選題

1. (1)

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：空間向量的坐標表示法

解析：如下略圖，建立空間坐標系



令 $A(0, 0, 0)$，則 $B(10, 0, 0)$，$D(0, 50, 0)$，$E(2, 7, 14)$

其中 I、J、K、L 分別為 E、F、G、H 對 xy 平面的投影點，M、N 分別為 E 對 x、y 軸的投影點

因為 $\overline{AM}=\overline{NI}=2$

所以 $\overline{IJ}=10-2\times2=6$

因為 $\overline{MI}=\overline{AN}=7$

所以 $\overline{IL}=50-7\times2=36$

因此 $\overrightarrow{AG}=(2+6, 7+36, 14)=(8, 43, 14)$

故選(1)。

2. (4)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：行列式、平行四邊形面積

解析：令 $\overrightarrow{u}=(a, b)$，$\overrightarrow{v}=(p, q)$，則 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 所決定的平行四邊形面積 $T=\left|\begin{vmatrix} a & p \\ b & q \end{vmatrix}\right|$

$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 所決定的平行四邊形面積為

$\left|\begin{vmatrix} 8a & 3a+4p \\ 8b & 3b+4q \end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix} 8a & 4p \\ 8b & 4q \end{vmatrix}\right|=32T$

$\Rightarrow \triangle ABC$ 面積$=16T$

$\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 所決定的平行四邊形面積為

$\left|\begin{vmatrix} 3a+4p & 12p \\ 3b+4q & 12q \end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix} 3a & 12p \\ 3b & 12q \end{vmatrix}\right|=36T$

$\Rightarrow \triangle ACD$ 面積$=18T$

$\because$四邊形 $ABCD$ 面積$=\triangle ABC$ 面積$+\triangle ACD$ 面積

$\therefore 272=16T+18T \Rightarrow T=8$

故選(4)。

3. (1)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：計數原理

解析：

商鋪＋馬車	共5個	共4個	共3個	共2個
士兵人偶	1～2個	1～4個	1～7個	1～9個
村民人偶	剩下的錢全部買村民人偶			

其中 $5=4+1=3+2=2+3=1+4$，

$4=3+1=2+2=1+3$，$3=2+1=1+2$，$2=1+1$

購買的方式共有 $4\times2+3\times4+2\times7+1\times9=43$ (種)

故選(1)。

二、多選題

4. (2)(5)

出處：第四冊〈矩陣〉、選修數學甲〈複數與多項式方程式〉

目標：旋轉矩陣、複數的極式

解析：由原式可推得 $(\cos 50^\circ+i\sin 50^\circ)(a+bi)=m+ni$

因此點 $A(a, b)$ 逆時針旋轉 50° 後為點 $B(m, n)$

點 $B(m, n)$ 逆時針旋轉 -50° 後為點 $A(a, b)$

故選(2)(5)。

5. (1)(2)(3)(5)

出處：第四冊〈機率〉

目標：條件機率、獨立事件

解析：因為 $P(D)=P(D\mid A)$，所以 A，D 互為獨立事件

同理可得 B，D 互為獨立事件，C，D 互為獨立事件

(1) ○：$P(D)=P(D\mid B)=\dfrac{P(D\cap B)}{P(B)}$

$\Rightarrow P(D\cap B)=P(D)\times P(B)$

(2) ○：$E=D'$

因為 A，D 互為獨立事件，所以 A，E 亦互為獨立事件，則 $P(E)=P(E\mid A)$

因為 B，D 互為獨立事件，所以 B，E 亦互為獨立事件，則 $P(E)=P(E\mid B)$

因此 $P(E)=P(E\mid A)=P(E\mid B)$

(3) ○：承(2)，同理可得 C，E 互為獨立事件

則 A，E 和 B，E 和 C，E 互為獨立事件

因此，$\dfrac{P(A\cap E)}{P(A\cap D)}=\dfrac{P(A)P(E)}{P(A)P(D)}=\dfrac{P(E)}{P(D)}=\dfrac{n(E)}{n(D)}$

同理，$\dfrac{P(B\cap E)}{P(B\cap D)}=\dfrac{n(E)}{n(D)}$，$\dfrac{P(C\cap E)}{P(C\cap D)}=\dfrac{n(E)}{n(D)}$

故 $\dfrac{n(A\cap E)}{n(A\cap D)}=\dfrac{n(B\cap E)}{n(B\cap D)}=\dfrac{n(C\cap E)}{n(C\cap D)}=\dfrac{n(E)}{n(D)}$

(4) ╳(5) ○：由(3)可推得 $\dfrac{360}{a}=\dfrac{b}{180}=\dfrac{580}{870}=\dfrac{2}{3}$

因此 $a=\dfrac{360\times3}{2}=540$，$b=\dfrac{180\times2}{3}=120$

故選(1)(2)(3)(5)。

6. (2)(3)(4)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：除法原理、餘式定理、一次近似

解析：(1) ╳：由餘式定理知 $f(x)$ 除以 $(x+1)$ 的餘式為

$f(-1)=1-2+3-4+5-6+7=4$

(2) ○：$f(1)-f(-1)=2\times(2+4+6)=24$

(3) ○：連續使用綜合除法，將 $f(x)$ 連續除以 $(x-1)$ 可得

$f(x)=(x-1)^6+8(x-1)^5+28(x-1)^4+56(x-1)^3$
$+70(x-1)^2+56(x-1)+28$

因此，$y=f(x)$ 在 $x=1$ 附近的一次近似為

$y=56(x-1)+28$

(4) ○(5) ╳：用長除法將 $x^6+2x^5+3x^4+4x^3+5x^2+6x+7$ 除以 x^2+2x+1

可得商式為 x^4+2x^2+3，餘式為 4

故選(2)(3)(4)。

7. (2)(3)(4)

出處：選修數學甲〈極限與函數〉

目標：高斯函數

解析：(1) ╳：$\lim\limits_{x\to 6^+}(-[-x])=-[-6.\cdots\cdots]=-(-7)=7$

(2) ○：$\lim\limits_{x\to 6^+}\left(-\left[\dfrac{-x+3-|x-3|}{2}\right]\right)$

$=\lim\limits_{x\to 6^+}\left(-\left[\dfrac{-x+3-(x-3)}{2}\right]\right)$

$=\lim\limits_{x\to 6^+}(-[-x+3])=-[-6.\cdots\cdots+3]$

$=-[-3.\cdots\cdots]=-(-4)=4$

(3) ○(4) ○(5) ╳：

$$\begin{cases} f(1)=a=40 \\ f(2)=2a+b=40+50=90 \\ f(4)=4a+3b+c=40+50+50+60=200 \end{cases}$$

$\Rightarrow a=40$，$b=10$，$c=10$

故選(2)(3)(4)。

8. (2)(4)(5)

出處：選修數學甲〈極限與函數〉

目標：無窮級數的和

解析：(1) ╳：$a_n=1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(2) ○：$b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{n(n+1)}{2}\right)$

$=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

(3) ╳：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}{\frac{1}{2}n(n+1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n}=1$

(4) ○：因為 $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{(n+1)-n}{n(n+1)}$

$=\dfrac{n+1}{n(n+1)}-\dfrac{n}{n(n+1)}$

$=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$

$=2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

$=2\left[\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots\cdots\right]$

$=2$

(5) ○：因為 $\dfrac{2}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)}$

$=\dfrac{n+2}{n(n+1)(n+2)}-\dfrac{n}{n(n+1)(n+2)}$

$=\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n(n+1)(n+2)}$

$=3\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

$=3\left[\left(\dfrac{1}{1\times 2}-\dfrac{1}{2\times 3}\right)+\left(\dfrac{1}{2\times 3}-\dfrac{1}{3\times 4}\right)+\left(\dfrac{1}{3\times 4}-\dfrac{1}{4\times 5}\right)+\cdots\cdots\right]$

$=3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

故選(2)(4)(5)。

三、選填題

9. $\dfrac{-1}{12}$

出處：選修數學甲〈積分〉

目標：微積分基本定理

解析：因為 $f'(1)=f'(3)=f'(6)=0$

所以令 $f'(x)=4a(x-1)(x-3)(x-6)$

$=4a(x^3-10x^2+27x-18)$

因為 $f(0)=0$，

所以 $f(x)=\displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt$

$=4a\left(\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{10}{3}x^3+\dfrac{27}{2}x^2-18x\right)$

又 $6=f(6)=4a(324-720+486-108)=-72a$

$\Rightarrow a=\dfrac{-1}{12}$。

10. 9

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：柯西不等式

解析：$\because a^2+b^2+c^2+6a+12b+4c=0$

$\Rightarrow (a+3)^2+(b+6)^2+(c+2)^2=49$

$\therefore$由柯西不等式可知

$[(a+3)^2+(b+6)^2+(c+2)^2](2^2+1^2+2^2)$

$\geq [2(a+3)+(b+6)+2(c+2)]^2$

$\Rightarrow 49\times 9\geq (2a+b+2c+16)^2$

$\Rightarrow -21\leq 2a+b+2c+16\leq 21$

$\Rightarrow -33\leq 2a+b+2c+4\leq 9$

最大值成立於 $\dfrac{a+3}{2}=\dfrac{b+6}{1}=\dfrac{c+2}{2}$

$\Rightarrow a=\dfrac{5}{3}$，$b=-\dfrac{11}{3}$，$c=\dfrac{8}{3}$

故 $2a+b+2c+4$ 的最大值為 9。

11. $5\sqrt{3}-8$

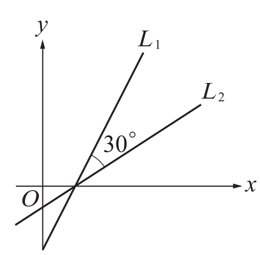
出處：第三冊〈三角函數〉

目標：正切的和差角公式

解析：令直線 L_1 的斜角為 θ，則直線 L_1 的斜率 $m_1=\tan\theta=2$

因為 $0<m_2<m_1$，且直線 L_1 與 L_2 的夾角為 30°

如下圖



所以 $m_2=\tan(\theta-30^\circ)=\dfrac{\tan\theta-\tan 30^\circ}{1+\tan\theta\times\tan 30^\circ}$

$=\dfrac{2-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1+2\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2}=\dfrac{(2\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}$

$=5\sqrt{3}-8$。

第貳部分、混合題或非選擇題

12. (4)

出處：第一冊〈指數、對數〉、第二冊〈數列與級數〉

目標：指數、等差數列、等比數列

解析：因為〈2^{a_n}〉為等比數列，公比為 8

所以 $\dfrac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}}=8\Rightarrow 2^{a_{n+1}-a_n}=2^3\Rightarrow a_{n+1}-a_n=3$

因此，〈a_n〉為等差數列，且公差為 3

故選(4)。

13. 36

出處：第二冊〈數列與級數〉、第三冊〈指數與對數函數〉

目標：等差數列、等比數列、對數律

解析：$\log a_3$，$\log a_7$，$\log a_{13}$，$\log a_k$ 此四數依序成等差數列

可推得 a_3，a_7，a_{13}，a_k 此四數依序成等比數列

又因為〈a_n〉為等差數列，且公差為 3

所以 $a_7{}^2=a_3a_{13}=(a_7-4\times3)(a_7+6\times3)$

$=(a_7-12)(a_7+18)=a_7{}^2+6a_7-216$

$\Rightarrow a_7=\dfrac{216}{6}=36$。

14. 22

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：等比數列

解析：因為 $a_7=36$

所以 $a_3=36-4\times3=24$，

$a_{13}=36+6\times3=54$

因為 24，36，54，a_k 此四數依序成等比數列

所以公比為 $\dfrac{36}{24}=\dfrac{3}{2}$，則 $a_k=54\times\dfrac{3}{2}=81$

又因為〈a_n〉為等差數列，且公差為 3

所以 $a_k=a_7+(k-7)\times3$

$\Rightarrow k-7=\dfrac{a_k-a_7}{3}=\dfrac{81-36}{3}=\dfrac{45}{3}=15\Rightarrow k=22$。

◎評分原則

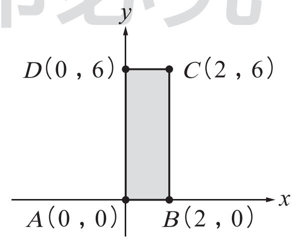
因為 $a_7=36$
所以 $a_3=36-4\times3=24$，　(1 分)
$a_{13}=36+6\times3=54$　(1 分)
因為 24，36，54，a_k 此四數依序成等比數列
所以公比為 $\dfrac{36}{24}=\dfrac{3}{2}$　(1 分)，則 $a_k=54\times\dfrac{3}{2}=81$　(1 分)
又因為〈a_n〉為等差數列，且公差為 3
所以 $a_k=a_7+(k-7)\times3$
$\Rightarrow k-7=\dfrac{a_k-a_7}{3}=\dfrac{81-36}{3}=\dfrac{45}{3}=15$
$\Rightarrow k=22$。　(2 分)

15. 72π，相符

出處：選修數學甲〈積分〉

目標：旋轉體體積

解析：長方形 $ABCD$ 繞 x 軸一圈所得的旋轉體為一個圓柱體



此圓柱體的體積為 $6^2\pi\times2=72\pi$

帕普斯幾何中心定理驗證如下：

長方形 $ABCD$ 的面積為 $2\times6=12$

且幾何中心 $P(1,3)$ 繞 x 軸旋轉一圈的圓周長度為

$2\times\pi\times3=6\pi$

根據帕普斯幾何中心定理，

旋轉體體積 $V=12\times6\pi=72\pi$，故相符。

〈另解〉

所求旋轉體體積為 $\pi\times\displaystyle\int_0^2 6^2dx=\pi\times\left(36x\Big|_0^2\right)=72\pi$

帕普斯幾何中心定理驗證如下：

長方形 $ABCD$ 的面積為 $2\times6=12$

且幾何中心 $P(1,3)$ 繞 x 軸旋轉一圈的圓周長度為

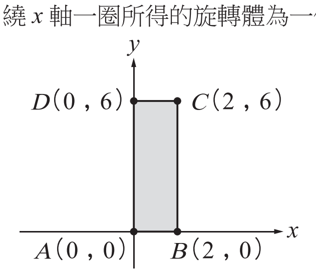
$2\times\pi\times3=6\pi$

根據帕普斯幾何中心定理，

旋轉體體積 $V=12\times6\pi=72\pi$，故相符。

◎評分原則

長方形 $ABCD$ 繞 x 軸一圈所得的旋轉體為一個圓柱體



此圓柱體的體積為 $6^2\pi\times2=72\pi$　(2 分)
帕普斯幾何中心定理驗證如下：
長方形 $ABCD$ 的面積為 $2\times6=12$
且幾何中心 $P(1,3)$ 繞 x 軸旋轉一圈的圓周長度為
$2\times\pi\times3=6\pi$
根據帕普斯幾何中心定理，
旋轉體體積 $V=12\times6\pi=72\pi$　(2 分)
故相符。
〈另解〉
所求旋轉體體積為 $\pi\times\displaystyle\int_0^2 6^2dx=\pi\times\left(36x\Big|_0^2\right)=72\pi$　(2 分)
帕普斯幾何中心定理驗證如下：
長方形 $ABCD$ 的面積為 $2\times6=12$
且幾何中心 $P(1,3)$ 繞 x 軸旋轉一圈的圓周長度為
$2\times\pi\times3=6\pi$
根據帕普斯幾何中心定理，
旋轉體體積 $V=12\times6\pi=72\pi$　(2 分)
故相符。

16. $126\pi^2$

出處：選修數學甲〈積分〉

目標：旋轉體體積

解析：根據帕普斯幾何中心定理：

圓 Ω 的面積為 $3^2\pi=9\pi$，圓心 $Q(0,7)$ 繞 x 軸旋轉一圈所得的圓周長度為 14π

故圓 Ω 繞 x 軸旋轉一圈所得的甜甜圈體積

$V=9\pi\times14\pi=126\pi^2$。

〈另解〉

旋轉體體積 $V=\pi\int_{-3}^{3}((7+\sqrt{9-x^2})^2-(7-\sqrt{9-x^2})^2)\,dx$

$=\pi\int_{-3}^{3}28\sqrt{9-x^2}\,dx$

$=28\pi\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$

$=28\pi\times\dfrac{3^2\pi}{2}=126\pi^2$。

◎評分原則

根據帕普斯幾何中心定理：

圓 Ω 的面積為 $3^2\pi=9\pi$　(1 分)，圓心 $Q(0,7)$ 繞 x 軸旋轉一圈所得的圓周長度為 14π　(1 分)

故圓 Ω 繞 x 軸旋轉一圈所得的甜甜圈體積

$V=9\pi\times14\pi=126\pi^2$。　(2 分)

〈另解〉

旋轉體體積 $V=\pi\int_{-3}^{3}((7+\sqrt{9-x^2})^2-(7-\sqrt{9-x^2})^2)\,dx$ (2 分)

$=\pi\int_{-3}^{3}28\sqrt{9-x^2}\,dx$

$=28\pi\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$　(1 分)

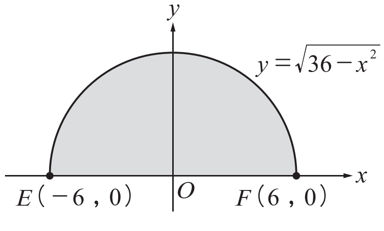
$=28\pi\times\dfrac{3^2\pi}{2}=126\pi^2$。　(1 分)

17. $\dfrac{8}{\pi}$

出處：選修數學甲〈積分〉

目標：旋轉體體積

解析：上半圓 Γ 繞 x 軸旋轉一圈所得的旋轉體為一顆半徑為 6 的球，且球的體積 $V=\dfrac{4}{3}\pi\times6^3=288\pi$



根據帕普斯幾何中心定理：

上半圓 Γ 的面積 $T=\dfrac{6^2\pi}{2}=18\pi$

幾何中心 $R(0,a)$ 繞 x 軸旋轉一圈所得的圓周長度為

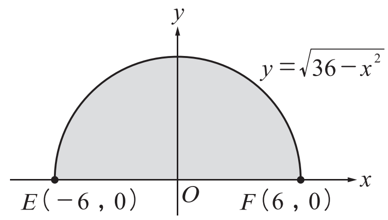
$L=2a\pi$

因為 $V=T\times L$，所以 $288\pi=(18\pi)\times(2a\pi)$

$\Rightarrow a=\dfrac{8}{\pi}$。

◎評分原則

上半圓 Γ 繞 x 軸旋轉一圈所得的旋轉體為一顆半徑為 6 的球，且球的體積 $V=\dfrac{4}{3}\pi\times6^3=288\pi$　(1 分)



根據帕普斯幾何中心定理：

上半圓 Γ 的面積 $T=\dfrac{6^2\pi}{2}=18\pi$　(1 分)

幾何中心 $R(0,a)$ 繞 x 軸旋轉一圈所得的圓周長度為

$L=2a\pi$　(1 分)

因為 $V=T\times L$，所以 $288\pi=(18\pi)\times(2a\pi)\Rightarrow a=\dfrac{8}{\pi}$。　(1 分)