114學年度全國高級中學

分科測驗模擬考試

數學乙考科A卷參考答案暨詳解

翰林出版事業股份有限公司

99362618-34

數學乙考科A卷詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(4)	(1)	(2)	(4)	(3)	(2)	(1)(3)(5)
8.	9.					
(1)(2)(3)(5)	(1)(3)(4)					

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉、第四冊A〈矩陣〉、第四冊B〈矩陣與資料表格〉

目標：滿足條件的矩陣個數

解析：$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}-1&-1\\1&1\end{bmatrix}$、

$\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$ 共 8 個

故選(4)。

2. (1)

出處：選修數學乙〈極限與函數〉

目標：過曲線上一點切線斜率與一階導數的關係

解析：曲線 $y=g(x)$ 在點 $(1,g(1))$ 處的切線方程式為 $y=2x+1$，可得 $g'(1)=2$

曲線 $y=f(x)$ 在點 $(1,f(1))$ 處的切線斜率為 $f'(1)$，

$f'(x)=g'(x)+2x$，故 $f'(1)=g'(1)+2=2+2=4$

故選(1)。

3. (2)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：古典機率的求法

解析：丟擲次數為 1 的機率為 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，點數可能為 3 或 4，

丟擲次數為 2 的機率為 $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

此時事件有 $(1,1)$，$(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$，$(2,1)$，$(2,2)$，$(2,3)$，$(2,4)$ 共 8 種

其中點數之和至少為 4 的情況有 $(1,3)$，$(1,4)$，$(2,2)$，$(2,3)$，$(2,4)$ 共 5 種

故丟擲骰子所得的點數之和至少為 4 的機率為

$\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}_{\text{丟1次為4點}}+\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}}_{\text{丟2次和}\geq 4}=\frac{9}{16}$，故選(2)。

4. (4)

出處：第三冊A〈平面向量〉、第三冊B〈平面向量與應用〉

目標：向量的線性組合係數間的關係

解析：$\because 3\alpha+4\beta=2$　$\therefore \frac{3}{2}\alpha+2\beta=1$

$\therefore \overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\alpha\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+2\beta\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

設 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

則 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\alpha\overrightarrow{AD}+2\beta\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\alpha\overrightarrow{AD}+\left(1-\frac{3}{2}\alpha\right)\overrightarrow{AE}$

$=\frac{3}{2}\alpha(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE})+\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\alpha\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AE}$

$\therefore \overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\alpha\overrightarrow{ED}\Rightarrow\overrightarrow{EP}=\frac{3}{2}\alpha\overrightarrow{ED}$

故 E、P、D 共線

$\therefore P$ 在 $\overline{DE}$ 上移動

當 P 點與 E 點重合時(即 P 點在 $\overline{AC}$ 上)，P 點到直線 BC 的距離取得最大值為

$\overline{CE}\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\overline{AC}\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

故選(4)。

5. (3)

出處：第一冊〈數與式〉、第一冊〈直線與圓〉

目標：了解兩直線垂直時，斜率的關係與算幾不等式的運用

解析：由題目可知，兩條直線斜率一定存在

又兩直線垂直　$\therefore$斜率乘積為 -1

即 $-\frac{a}{b}\times\left(-\frac{2}{3-\frac{1}{b}}\right)=-1\Rightarrow 2a+3b=1$

由算幾不等式 $\frac{2a+3b}{2}\geq\sqrt{6ab}\Rightarrow\frac{1}{2}\geq\sqrt{6ab}$，

兩邊平方得 $\frac{1}{4}\geq 6ab\Rightarrow ab\leq\frac{1}{24}$

即 ab 的最大值為 $\frac{1}{24}$，故選(3)。

6. (2)

出處：選修數學乙〈極限與函數〉

目標：函數極限與無窮數列極限值的求法

解析：$\because \lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax-b)=4\Rightarrow 4+2a-b=4\Rightarrow 2a=b$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{1}{2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+ab^{n-1}}{a^{n-1}+2b^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a\left(\frac{a}{b}\right)^n+\frac{a}{b}}{\frac{1}{a}\left(\frac{a}{b}\right)^n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}}{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}\right)^n+2}=\frac{1}{4}$

故選(2)。

二、多選題

7. (1)(3)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：最適直線、標準差和相關係數的性質與求法

解析：$\mu_X=\frac{1}{5}(1+2+3+4+5)=3$，

$\mu_Y=\frac{1}{5}(5+m+8+9+10.5)=\frac{32.5+m}{5}$

(1)○(2)╳(3)○：

將 (μ_X,μ_Y) 代入 $y=1.25x+4.25$，得 $\mu_Y=8$

又 $\frac{32.5+m}{5}=8\Rightarrow m=7.5$

迴歸直線斜率為 $1.25=r_{X,Y}\times\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$，

可知 $r_{X,Y}>0$，因此 y 與 x 為正相關

(4)╳：若 $x'=3x+1$，$y'=\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}$

$\because 3\times\frac{3}{2}>0$　$\therefore$相關係數不變

(5)○：承(1)，$1.25=r_{X,Y}\times\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$

$\Rightarrow \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}=\frac{1.25}{r_{X,Y}}>1$ ($\because 0<r_{X,Y}\le 1$)

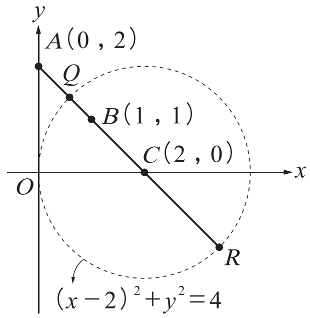
故選(1)(3)(5)。

8. (1)(2)(3)(5)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓方程式性質的運用

解析：作圖如下，顯然點 $A(0, 2)$ 在圓 $(x-2)^2+y^2=4$ 外，點 $B(1, 1)$ 在圓內，圓的半徑為 2，直線 AB 方程式為 $y=-x+2$，圓心 $C(2, 0)$ 在直線 AB 上，



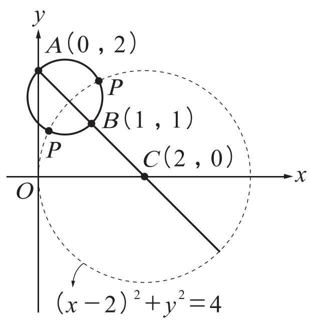
(1)○：當 $P=Q$ 時，

$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{QA}+\overline{QB}=\overline{AB}=\sqrt{2}$ 為最小值

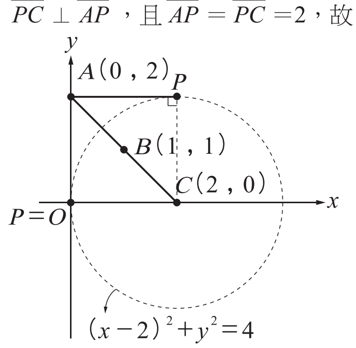
(2)○：當 $P=R$ 時，

$|\overline{PA}-\overline{PB}|=|\overline{RA}-\overline{RB}|=\overline{AB}=\sqrt{2}$ 為最大值

(3)○：若 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$，則 P 位於以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓上，如下圖，P 點有 2 個



(4)╳：當 $\overline{AP}$ 與圓相切時，$\angle PAB$ 最大，即 $\overline{PC}\perp\overline{AP}$，且 $\overline{AP}=\overline{PC}=2$，故 $\angle PAB=45^\circ$，



$\therefore\triangle PAB$ 的面積為

$\frac{1}{2}\ \overline{PA}\cdot\overline{AB}\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

(5)○：直線 AB 過圓心 C，圓上的點到直徑的最遠距離等於半徑

$\therefore P$ 點到直線 AB：$y=-x+2$ 的距離最大值為 2

因此 $\triangle PAB$ 面積的最大值為 $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 2=\sqrt{2}$

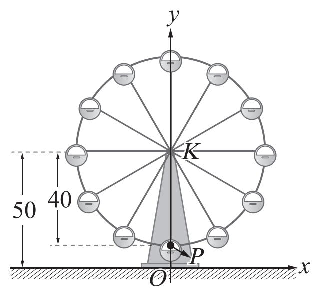
故選(1)(2)(3)(5)。

9. (1)(3)(4)

出處：第三冊 A〈三角函數〉、第三冊 B〈正弦函數與週期性現象〉

目標：正弦函數圖形的討論

解析：建立平面直角坐標系，如下圖所示：



則 $P(0, 10)$，$K(0, 50)$，$a=40$，$k=50$

由週期為 30，可得 $\frac{2\pi}{\omega}=30\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{15}$

$\therefore P$ 點離地面的高度為

$y=a\sin(\omega t+\theta)+k=40\sin\left(\frac{\pi}{15}t+\theta\right)+50$

將 $P(0, 10)$ 代入得 $10=40\sin\theta+50\Rightarrow\sin\theta=-1$

又 $0\le\theta<2\pi$，得 $\theta=\frac{3\pi}{2}$

$\therefore y=40\sin\left(\frac{\pi}{15}t+\frac{3\pi}{2}\right)+50$

(1)○：當 $t=15$ 時，

$y=40\sin\left(\pi+\frac{3\pi}{2}\right)+50=90$

$\therefore$ 經過 15 分鐘，P 點首次到達最高點

(2)╳：從開始到第 15 分鐘，P 點距離地面的高度一直在升高，從第 15 分鐘到第 30 分鐘，高度在降低

(3)○：令 $y=40\sin\left(\frac{\pi}{15}t+\frac{3\pi}{2}\right)+50>70$，

即 $\sin\left(\frac{\pi}{15}t+\frac{3\pi}{2}\right)>\frac{1}{2}$，

解得 $2\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{15}t+\frac{3\pi}{2}<2\pi+\frac{5\pi}{6}$，

$\therefore 10<t<20$，有 10 分鐘的時間，P 點距離地面超過 70 公尺

(4)○：$\omega=\frac{\pi}{15}$

(5)╳：$\theta=\frac{3\pi}{2}$

故選(1)(3)(4)。

三、選填題

10. 8

出處：第一冊〈指數、對數〉、第一冊〈多項式函數〉

目標：基本的指數律和二次函數最大值求法

解析：$\frac{8^{-\frac{2}{3}x+1}}{2^{x^2}}=\frac{2^{-2x+3}}{2^{x^2}}$

$=2^{-x^2-2x+3}=2^{-(x+1)^2+4}$

$\therefore$ 在 $-3\le x\le -2$，當 $x=-2$ 時，有最大值為 $2^3=8$。

11. $\frac{1}{3}$

出處：第四冊 A〈機率〉、第四冊 B〈機率〉

目標：條件機率和貝氏定理的用法

解析：令 A 表示丟掉一顆球後，任取的兩顆球均為紅球

B_1 表示丟掉的球為紅球

B_2 表示丟掉的球為黑球

則 $P(B_1)=P(B_2)=\frac{1}{2}$，$P(A\mid B_1)=\frac{C_2^3}{C_2^7}=\frac{1}{7}$，

$P(A\mid B_2)=\frac{C_2^4}{C_2^7}=\frac{2}{7}$

$\Rightarrow P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{14}$

$\therefore P(B_1\mid A)=\frac{P(A\cap B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}}{\frac{3}{14}}=\frac{1}{3}$。

12. $\frac{-3}{2}$

出處：選修數學乙〈複數與多項式方程式〉

目標：複數的運算

解析：$\omega=\left(\frac{a+i}{1+i}\right)^2=\left(\frac{(a+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^2=\left(\frac{a+1}{2}+\frac{1-a}{2}i\right)^2$

$=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2+2\left(\frac{a+1}{2}\right)\left(\frac{1-a}{2}i\right)+\left(\frac{1-a}{2}i\right)^2$

$=\frac{a^2+2a+1}{4}+\frac{1-a^2}{2}i+\frac{-1+2a-a^2}{4}=a+\frac{1-a^2}{2}i$

故 $a=2$

$\therefore$虛部為 $\frac{1-a^2}{2}=\frac{1-2^2}{2}=\frac{-3}{2}$。

13. $\frac{1}{4}$

出處：選修數學乙〈積分〉

目標：利用積分求曲線間的面積

解析：由題圖可知，陰影部分可分為直線 $y=t^2$ 上方和下方

直線 $y=t^2$ 下方陰影部分面積為

$t^2\cdot t-\int_0^t x^2dx=t^3-\left(\frac{1}{3}x^3\Big|_0^t\right)=\frac{2}{3}t^3$

直線 $y=t^2$ 上方陰影部分面積為

$\int_t^1 x^2dx-(1-t)\cdot t^2=\left(\frac{1}{3}x^3\Big|_t^1\right)-t^2+t^3$

$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}t^3\right)-t^2+t^3=\frac{2}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$

故 $f(t)=\frac{2}{3}t^3+\left(\frac{2}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$

$f'(t)=4t^2-2t=4t\left(t-\frac{1}{2}\right)$

$f'(t)$，$f(t)$ 的關係如下表：

t		0		$\frac{1}{2}$	
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{4}$	
增減	↗	0	↘	0	↗

$\because 0<t<1$ $\therefore$最小值發生在 $t=\frac{1}{2}$ 時

即最小值為 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

14. (3)

出處：第三冊 A〈指數與對數函數〉、

第三冊 B〈按比例成長模型〉

目標：對數在日常生活中的實際運用

解析：將 $x_0=5$，$v=0$ 代入函數式，

可得 $0=\frac{1}{2}\log_3\frac{x}{100}-\log 5$，

即 $\log_3\frac{x}{100}=2\log 5=2(1-\log 2)$

$\approx 2\times 0.6990=1.398$

$\therefore \frac{x}{100}=3^{1.398}\approx 3^{1.4}\approx 4.66$，即 $x\approx 466$

故候鳥停下休息時，

牠每分鐘的耗氧量約為 466 個單位，故選(3)。

15. 9 倍

出處：第三冊 A〈指數與對數函數〉、

第三冊 B〈按比例成長模型〉

目標：對數在日常生活中的實際運用

解析：設雄鳥每分鐘的耗氧量為 x_1，

雌鳥每分鐘的耗氧量為 x_2，

依題意可得 $\begin{cases}2.5=\frac{1}{2}\log_3\frac{x_1}{100}-\log x_0\\ 1.5=\frac{1}{2}\log_3\frac{x_2}{100}-\log x_0\end{cases}$

兩式相減可得 $1=\frac{1}{2}\log_3\frac{x_1}{x_2}$，即 $\frac{x_1}{x_2}=3^2=9$

故此時雄鳥每分鐘的耗氧量是雌鳥每分鐘耗氧量的 9 倍。

◎評分原則

設雄鳥每分鐘的耗氧量為 x_1，

雌鳥每分鐘的耗氧量為 x_2，

依題意可得 $\begin{cases}2.5=\frac{1}{2}\log_3\frac{x_1}{100}-\log x_0\\ 1.5=\frac{1}{2}\log_3\frac{x_2}{100}-\log x_0\end{cases}$ (2 分)

兩式相減可得 $1=\frac{1}{2}\log_3\frac{x_1}{x_2}$ (2 分)，即 $\frac{x_1}{x_2}=3^2=9$ (1 分)

故此時雄鳥每分鐘的耗氧量是雌鳥每分鐘耗氧量的 9 倍。

16. (1)(3)

出處：選修數學乙〈微分〉

目標：三次函數圖形的特徵

解析：(1) ◯(2) ╳(3) ◯：

由題意知 $f'(x)=3ax^2-b$

$\because f(x)$ 在 $x=2$ 處取得極小值為 $-\frac{4}{3}$

則 $\begin{cases}f'(2)=12a-b=0\\ f(2)=8a-2b+4=-\frac{4}{3}\end{cases}$

解得 $a=\frac{1}{3}$，$b=4$ $\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$

(4) ╳：$f'(x)=x^2-4$

令 $f''(x)=2x=0 \Rightarrow x=0$

$\therefore$ 反曲點坐標為 $(0, f(0))=(0, 4)$

(5) ╳：$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$

$=\frac{1}{3}(x-1)^3+(x-1)^2-3(x-1)+\frac{1}{3}$

$\therefore$ 函數 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 附近會近似於直線

$y=-3(x-1)+\frac{1}{3}=-3x+\frac{10}{3}$

故選(1)(3)。

17. $\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{8}\right)$

出處：選修數學乙〈微分〉

目標：函數圖形切線的求法

解析：由 16. 題可知 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$

令 $x=1$ 代入得 $f(1)=\frac{1}{3}-4+4=\frac{1}{3}\neq 0$

故 $P(1, 0)$ 不在 $y=f(x)$ 的圖形上

設切點坐標為 $Q\left(t, \frac{1}{3}t^3-4t+4\right)$

$f'(x)=x^2-4$，斜率 $m=f'(t)=t^2-4$

故切線方程式為 $y-\left(\frac{1}{3}t^3-4t+4\right)=(t^2-4)(x-t)$

切線過 $P(1, 0)$，

可得 $-\frac{1}{3}t^3+4t-4=(t^2-4)(1-t)=-t^3+t^2+4t-4$

$\Rightarrow \frac{2}{3}t^3-t^2=0 \Rightarrow 2t^3-3t^2=0 \Rightarrow t^2(2t-3)=0$

$\Rightarrow t=0$ 或 $\frac{3}{2}$，得兩切點為 $(0, 4)$ 與 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{8}\right)$，

又 $(0, 4)$ 為對稱中心，故所求為 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{8}\right)$。

◎評分原則

由 16. 題可知 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$

令 $x=1$ 代入得 $f(1)=\frac{1}{3}-4+4=\frac{1}{3}\neq 0$

故 $P(1, 0)$ 不在 $y=f(x)$ 的圖形上

設切點坐標為 $Q\left(t, \frac{1}{3}t^3-4t+4\right)$

$f'(x)=x^2-4$，斜率 $m=f'(t)=t^2-4$　(1 分)

故切線方程式為 $y-\left(\frac{1}{3}t^3-4t+4\right)=(t^2-4)(x-t)$　(1 分)

切線過 $P(1, 0)$，

可得 $-\frac{1}{3}t^3+4t-4=(t^2-4)(1-t)=-t^3+t^2+4t-4$

$\Rightarrow \frac{2}{3}t^3-t^2=0 \Rightarrow 2t^3-3t^2=0 \Rightarrow t^2(2t-3)=0$

$\Rightarrow t=0$ 或 $\frac{3}{2}$　(2 分)

得兩切點為 $(0, 4)$ 與 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{8}\right)$，又 $(0, 4)$ 為對稱中心，

故所求為 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{8}\right)$。　(1 分)

18. $k<-\frac{28}{3}$ 或 $k>\frac{4}{3}$

出處：選修數學乙〈微分〉

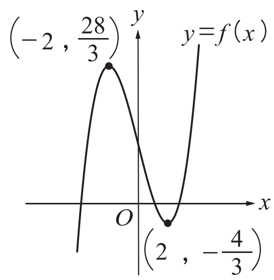
目標：導數與函數圖形之間的關係

解析：令 $f'(x)=x^2-4=0$，解得 $x=-2$ 或 2

則 x，$f'(x)$，$f(x)$ 的關係如下表：

x		-2		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\frac{28}{3}$		$-\frac{4}{3}$	
增減	↗		↘		↗

圖形如下



則 $f(-2)=\frac{28}{3}$，$f(2)=-\frac{4}{3}$

方程式 $f(x)+k=0$ 恰有一個實數，

意即函數 $y=-k$ 與 $y=f(x)$ 兩圖形有且只有一個交點，

即 $-k<-\frac{4}{3}$ 或 $-k>\frac{28}{3}$，解得 $k<-\frac{28}{3}$ 或 $k>\frac{4}{3}$。

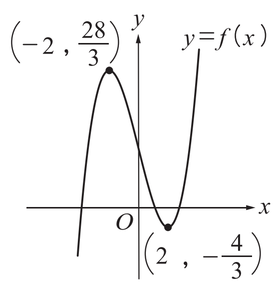
◎評分原則

令 $f'(x)=x^2-4=0$，解得 $x=-2$ 或 2　(1 分)

則 x，$f'(x)$，$f(x)$ 的關係如下表：　(1 分)

x		-2		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\frac{28}{3}$		$-\frac{4}{3}$	
增減	↗		↘		↗

圖形如下



(2 分)

則 $f(-2)=\frac{28}{3}$，$f(2)=-\frac{4}{3}$

方程式 $f(x)+k=0$ 恰有一個實數

意即函數 $y=-k$ 與 $y=f(x)$ 兩圖形有且只有一個交點，

即 $-k<-\frac{4}{3}$ 或 $-k>\frac{28}{3}$，解得 $k<-\frac{28}{3}$ 或 $k>\frac{4}{3}$。　(1 分)