

北北基高級中等學校
114 學年度學科能力測驗聯合模擬考試
數學 A 考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

—作答注意事項—

考試範圍：第一～二冊、數學 A 第三冊

考試時間：100 分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正帶（液）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\frac{(18-1)}{(18-2)}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上的第 18-1

列的 $\frac{3}{8}$ 與第 18-2 列的 $\frac{8}{8}$ 劃記，如：

18-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
18-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

例：若答案格式是 $\frac{(19-1)(19-2)}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 $\frac{-}{50}$ 與

第 19-2 列的 $\frac{7}{50}$ 劃記，如：

19-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐
19-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

選擇(填)題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

祝考試順利



99362303-34

版權所有・翻印必究

第壹部分、選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

1. 坐標平面上，從 $(0, 0)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(0, 1)$ 、 $(2, 0)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(0, 2)$ 這六個點中隨機選取相異兩個點（假設每個點被選到的機會均等），則選取兩點的距離大於 1 的機率為何？

(1) $\frac{1}{3}$

(2) $\frac{2}{3}$

(3) $\frac{1}{5}$

(4) $\frac{2}{5}$

(5) $\frac{3}{5}$

版權所有
翻印必究

2. 設 $\langle a_n \rangle$ 為一等比數列，且前 n 項總和記為 S_n 。若 $a_4 = \frac{1}{8}$ ， $a_7 = \frac{1}{64}$ ，則所有點 (n, S_n) (n 為正整數) 會在下列哪一個選項的函數圖形上？

(1) $y = -2^x + \frac{5}{2}$

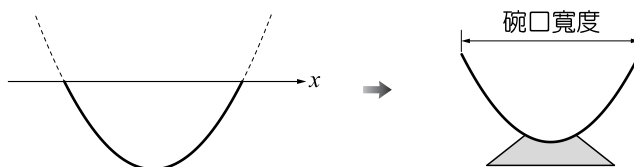
(2) $y = -2^{-x} + \frac{3}{2}$

(3) $y = -2^{1-x} + 2$

(4) $y = 2^{x-1} - \frac{1}{2}$

(5) $y = 2^x - \frac{3}{2}$

3. 某工廠以電腦程式繪製了拋物線 $y=2x^2+(2k+2)x+(2k-1)$ 的圖形，並取 $y \leq 0$ 的部分，設計成一款側面為拋物線形狀的碗，如下圖所示。

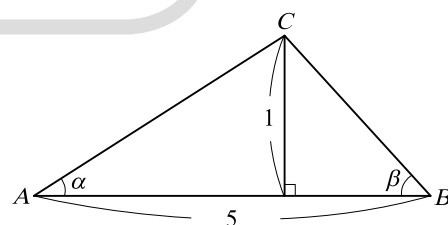


工程師正在測試不同的實數 k 值對碗口寬度的影響，試問當 k 值為何時，碗口寬度會最小？

- (1) -1
(2) 0
(3) 1
(4) 2
(5) 3
4. 四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB}=3$ ， $\overline{AC}=2$ ， $\overline{AD}=1$ ，且 $\angle BAD=120^\circ$ 。試求四邊形 $ABCD$ 面積的最大可能值為何？

- (1) $\sqrt{10}$
(2) $\sqrt{11}$
(3) $\sqrt{12}$
(4) $\sqrt{13}$
(5) $\sqrt{14}$

5. 如右略圖，同一水平線上兩地點 A 與 B 由坡道 $\overline{AC}$ 與坡道 $\overline{CB}$ 連接，坡道頂點為 C 。設 A 、 B 間的距離為 5 單位， C 點的高度為 1 單位。令 $\angle CAB=\alpha$ ， $\angle CBA=\beta$ ， $\tan \alpha=x$ 。若一臺小車在坡道上從 A 行駛至 B ，在上坡路段 $\overline{AC}$ 的行駛速度為每分鐘 $\cos \alpha$ 單位；在下坡路段 $\overline{CB}$ 的行駛速度為



每分鐘 $\frac{1}{\cos \beta}$ 單位，則小車在坡道上從 A 行駛至 B 的時間為下列哪一個選項？

- (1) $x+5$ 分鐘
(2) $5x+1$ 分鐘
(3) $\frac{x}{5x+1}$ 分鐘
(4) $\frac{x}{x+5}$ 分鐘
(5) $x+10+\frac{1}{5x-1}$ 分鐘

6. 設正實數 x, y, z, k 滿足 $2 + \log_2 x = 4 + \log_4 y = 8 + \log_8 z = k$ ，且 $x < y < z$ ，則下列選項何者是可能的 k 值？
- (1) 10
 - (2) 15
 - (3) $\log 114$
 - (4) $\log_2 2025$
 - (5) π^π

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

7. 已知實係數三次多項式 $f(x)$ 除以 $(x-3)^3$ 的餘式為一次多項式 $g(x)$ ，試選出正確的選項。
- (1) $f(3) = g(3)$
 - (2) $y = f(x)$ 的圖形在 $x=3$ 附近會近似於直線 $y = g(x)$
 - (3) $y = f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(3, 0)$
 - (4) $y = f(x) - g(x)$ 圖形的對稱中心為 $(3, 0)$
 - (5) $y = f(x)$ 的圖形與 $y = g(x)$ 的圖形有三個交點
8. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的一般項為 $a_n = n^2 - 10n + 9$ (n 為正整數)，試選出正確的選項。
- (1) 數列 $\langle a_n \rangle$ 中，恰有 9 項小於 0
 - (2) a_{100} 為 39 的倍數
 - (3) 數列 $\langle a_n \rangle$ 中，值最小的為 a_5
 - (4) $a_1, a_2, \dots, a_{10}, a_{11}$ 的中位數為 -15
 - (5) $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{10}| + |a_{11}| > 120$
9. 已知 $f(x) = |x| + |x - a|$ ，其中 a 為正實數。若 $f(x)$ 的最小值為 2，試選出正確的選項。
- (1) $a = 2$
 - (2) $f(x)$ 的最大值為 10
 - (3) 不等式 $f(x) \leq 4$ 的解為 $-1 \leq x \leq 3$
 - (4) 若 x_1, x_2 是兩相異實數且 $f(x_1) = f(x_2)$ ，則 $x_1 + x_2 = 2$
 - (5) 若點 (h, k) 在 $y = f(x)$ 的圖形上，則點 $(2-h, 4-k)$ 也在 $y = f(x)$ 的圖形上

10. $\triangle OAB$ 中， $\overline{OA}=5$ ， $\overline{OB}=3$ ， $\angle AOB=120^\circ$ 。設 M 為 $\overline{AB}$ 的中點， $\triangle OAM$ 與 $\triangle OMB$ 的重心分別為 G_1 與 G_2 ，試選出正確的選項。

- (1) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{15}{2}$
 (2) $\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$
 (3) $3(\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2}) = 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$
 (4) $\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
 (5) $\overrightarrow{OG_1} \cdot \overrightarrow{OG_2} = \frac{3}{4}$

11. 有一種特製的公正骰子，其六個面上的點數分別為 1、1、2、3、4、5。今連續投擲此骰子四次，並將第一、二、三、四次所得的點數依序填入右圖 A 、 B 、 C 、 D 的四個格子中，試選出正確的選項。

A	B
C	D

- (1) 四格填入的數字均不為 1 的機率為 $\frac{24}{6^4}$
 (2) 四格均填入數字 1 的機率為 $\frac{16}{6^4}$
 (3) 四格數字均相異的機率為 $\frac{120}{6^4}$
 (4) 四格數字的和為 18 的機率為 $\frac{10}{6^4}$
 (5) 相鄰的格子填入的數字不同且 A 、 D 填入相同數字之機率為 $\frac{164}{6^4}$

12. 五位學生參與某次學科能力測驗，本次測驗共有數學 (X) 與物理 (Y) 兩個科目，他們的成績及相關統計數據如下表所示：

成績 \ 學生	甲	乙	丙	丁	戊	平均	標準差
科目							
數學 X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	3	1
物理 Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	4	2
X 與 Y 的相關係數為 $\frac{1}{2}$							

今將數學與物理成績採用加權計算總分得成績 Z ，其中 $z_i = 2x_i + y_i$ ($i=1, 2, 3, 4, 5$)，試選出正確的選項。

- (1) Y 對 X 的最適直線方程式為 $y = \frac{1}{4}x + \frac{15}{4}$
 (2) $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5 = 65$
 (3) 成績 Z 的平均數為 10
 (4) 成績 Z 的標準差為 $2\sqrt{3}$
 (5) 成績 Z 與 Y 的相關係數小於 $\frac{1}{2}$

三、選填題（占 25 分）

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 坐標平面上，已知兩非零向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 不平行，若 $\vec{a}$ 、 $\frac{1}{3}\vec{b}$ 、 $t\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{b}$ 三向量的始點相同且終點在同一直線上，則實數 t 之值為 $\frac{\textcircled{13-1}}{\textcircled{13-2}}$ 。(化為最簡分數)

14. 在坐標平面上，過點 P 作直線 L 的垂線所得的垂足稱為點 P 在直線 L 上的投影點。已知聯立不等式 $\begin{cases} x-3y+4 \geq 0 \\ x+y \leq 4 \\ y \geq 1 \end{cases}$ 所對應的區域中，所有點在直線 $x+y=3$ 上的投影點形成一線段，則此線段的長度為 $\frac{\textcircled{14-1}\sqrt{\textcircled{14-2}}}{\textcircled{14-3}}$ 。(化為最簡根式)

15. 一數學試卷有 6 題單選題(每題均有 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五個選項，其中一個為正確答案)，命題教師為了避免 6 題都猜一樣答案的學生得分過高，因此依以下原則設計正確答案：
- (I) 選項 A 、 B 、 C 、 D 、 E 至多只有一個不出現在正確答案中。
- (II) 正確答案為同一個選項的，至多為兩題。
- 例如，6 題的正確答案依序為 $BCADAB$ 或 $BCAEAD$ 皆是符合(I)(II)原則的；而 $BACCCD$ 或 $AACEEC$ 皆為不符合的。試問此試卷 6 題單選題的正確答案之次序有 $\frac{\textcircled{15-1}\textcircled{15-2}\textcircled{15-3}\textcircled{15-4}}{\textcircled{15-5}}$ 種不同的可能。

16. 坐標平面上，已知圓 $C_1: (x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$ ，圓 $C_2: (x-4)^2 + (y-5)^2 = 4$ 及點 $A(4, 0)$ 。設直線 L_1 過點 A 且與圓 C_1 交於 P 、 Q 兩點，直線 L_2 亦過點 A 且與圓 C_2 交於 R 、 S 兩點。若 L_1 垂直 L_2 且 $\overline{PQ} = \overline{RS}$ ，則直線 L_1 的斜率為 $\frac{\textcircled{16-1}\textcircled{16-2}}{\textcircled{16-3}\textcircled{16-4}}$ 。(化為最簡分數)

17. 一袋中裝有編號分別為 1、2、3 的三顆球。隨機抽取一球，將球放回後，再隨機抽取一球，假設每球被抽取的機會均等。若兩次取球的編號依序為 a 、 b ，則方程式 $a \sin bx = \frac{x}{\pi}$ 在 $0 \leq x \leq \pi$ 內實數解個數的期望值為 $\frac{\textcircled{17-1}}{\textcircled{17-2}}$ 個。(化為最簡分數)

第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，單選題每題 3 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

坐標平面上三相異點 $A(a, 0)$ 、 $B(-a, 0)$ 、 $C(0, b)$ ，其中 a 、 b 為正實數。若 D 、 E 分別為線段 $\overline{CA}$ 與 $\overline{CB}$ 的中點，試回答下列問題。

18. 向量 $\overrightarrow{BD}$ 的坐標表示法為下列哪一個選項？(單選題，3 分)

- (1) (a, b)
- (2) $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$
- (3) $\left(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$
- (4) $\left(\frac{3a}{2}, \frac{b}{2}\right)$
- (5) $\left(-\frac{3a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

19. 若 $\overline{BD}$ 垂直 $\overline{AE}$ ，試求 $\sin \angle ACB$ 。(非選擇題，6 分)

20. 若 $\overline{AE} = 3$ ，試求 $\triangle ABC$ 面積的最大值，及此時 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑。(非選擇題，6 分)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$
首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$
2. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$
標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_X)^2 + (x_2 - \mu_X)^2 + \dots + (x_n - \mu_X)^2]}$
$$= \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu_X^2]}$$
3. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，
相關係數 $r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_X)(y_1 - \mu_Y) + (x_2 - \mu_X)(y_2 - \mu_Y) + \dots + (x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$
$$= \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n - n\mu_X\mu_Y}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu_X^2} \sqrt{(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) - n\mu_Y^2}}$$

迴歸直線 (最適合直線) 方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$
4. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)
 $\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
5. 三角函數的和角公式：
 $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
 $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
 $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$
6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$
7. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 5 \approx 0.6990$ ， $\log 7 \approx 0.8451$