2022年第22屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第52屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試參考解答(暫定版)

壹、選擇填充混合題(每格4分，共30格，合計120分)

一、

參考解答：(1) __(B)__

(1) 摺紙螺旋槳在達到終端速度後，即以等速下落（飛行），其下落距離可表為 $h = v_T T$，v_T為終端速度，故知 $\alpha = 1$；(A)不正確。

由對質量的因次分析可得：

$\rho^\gamma W^\delta \rightarrow [\frac{M}{L^3}]^\gamma \cdot [\frac{M \cdot L^2}{T^2}]^\delta \rightarrow \gamma + \delta = 0 \rightarrow \gamma = -\delta$；(C)、(D)不正確。

又因題目給的各物理量中只有 W 含有時間 T，故知$\delta = -\frac{1}{2}; \gamma = \frac{1}{2}$。將結果代入題給的式子後，可得：$\beta = 0$；(B)正確。

另解：

直接列出各因次關係：$[T] = [L]^\alpha [L]^\beta [\frac{M}{L^3}]^\gamma [\frac{M \cdot L}{T^2}]^\delta$

由對質量的因次分析可得：$\rho^\gamma W^\delta \rightarrow [\frac{M}{L^3}]^\gamma \cdot [\frac{M \cdot L}{T^2}]^\delta \rightarrow \gamma + \delta = 0 \rightarrow \gamma = -\delta$；

(C)、(D)不正確。

又因題目給的各物理量中只有 W 含有時間 T，故知$\delta = -\frac{1}{2}; \gamma = \frac{1}{2}$。

最後，對長度因次分析可得：

$$\alpha + \beta - 3\gamma + \delta = 0 \ \rightarrow \ \alpha + \beta - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \alpha + \beta - 1 = 0 \ \rightarrow \ \alpha + \beta = 1$$

摺紙螺旋槳在達到終端速度後，即以等速下落（飛行），其下落距離可表為 $h = v_T T$，v_T為終端速度，故知 $\alpha = 1$；(A)不正確。最後由上式可知$\beta = 0$；(B)正確。

二、

參考解答：(2) $P_f = P_i(1 + \frac{2W}{3nRT_i})^{\frac{5}{2}}$

(2) 因過程為絕熱，由熱力學第一定律知：

$\Delta U = 0 - (-W)$（外界作功為負），

$$W = nC_V(T_f - T_i) = \frac{3}{2}nR(T_f - T_i) \ \rightarrow \ T_f = T_i + \frac{2W}{3nR} \quad (1)$$

又可逆絕熱過程滿足：$P_iV_i^\gamma = P_fV_f^\gamma$ → $P_i(\frac{nRT_i}{P_i})^\gamma = P_f(\frac{nRT_f}{P_f})^\gamma$

→ $T_i^\gamma P_i^{1-\gamma} = T_f^\gamma P_f^{1-\gamma}$ → $\frac{T_i^{\gamma/(\gamma-1)}}{P_i} = \frac{T_f^{\gamma/(\gamma-1)}}{P_f}$ → $P_f = P_i(\frac{T_f}{T_i})^{\gamma/(\gamma-1)}$ (2)

將(1)以及$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3}$（單原子理想氣體)代入(2)，可得

$$P_f = P_i(\frac{T_i + \frac{2}{3}\frac{W}{nR}}{T_i})^{5/2} = P_i(1 + \frac{2W}{3nRT_i})^{\frac{5}{2}}$$

三、

參考解答：(3) $\frac{R^4}{2ga^4}\upsilon^2$

(3) 在活塞靜止的座標系中，水由圓桶底部以速度υ向上流向活塞，設水流通過小洞的速度為υ'，則由連續性可知$\pi R^2\upsilon = \pi a^2\upsilon'$，因此$\upsilon' = \frac{R^2}{a^2}\upsilon$。由此利用能量守恆可知當水柱動能完全轉換為重力位能時達最大高度h，故$\rho gh = \frac{1}{2}\rho\upsilon'^2$，可得$h = \frac{R^4}{2ga^4}\upsilon^2$。

四、

參考解答：(4) $\Delta y = \frac{mg}{\Gamma L}(L-x)\Delta x$ (5) $L(1+\frac{mg}{2\Gamma})$

(4) 當若彈簧垂直懸掛後半徑變化可被忽略，Γ可視為固定，則點附近一小段原長Δx之彈簧受力為$\Gamma\frac{x+\Delta x+y(x+\Delta x)-(x+y(x))-\Delta x}{\Delta x} = \Gamma\frac{\Delta y}{\Delta x}$，

此受力因等於A點向下的彈簧重量$\frac{m}{L}(L-x)g$，故

$$\Gamma\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{mg}{L}(L-x)$$

因此原長Δx之彈簧懸掛後之長度$\Delta y = \frac{mg}{\Gamma L}(L-x)\Delta x$。

(5) 由 $\Gamma\frac{dy}{dx} = \frac{mg}{L}(L-x)$

可得 $y(x) = \frac{mg}{\Gamma}x - \frac{mg}{2L\Gamma}x^2 + C$，$C$為一常數，

因$y(0) = 0$，故$C = 0$，$y(x) = \frac{mg}{\Gamma}x - \frac{mg}{2L\Gamma}x^2$，彈簧總長度為$L + y(L) = L(1+\frac{mg}{2\Gamma})$

五、

參考解答：(6) (A)

(6) 假設牛乳瓶中液體的整體高度為l，油水分離後乳脂的高度為h，乳脂占整體牛乳的體積比例為 f，而乳脂與排除乳脂後剩下的液體之密度分別為ρ_{f}與ρ_{w}，那麼我們知道 $\rho_{\mathrm{f}} < \rho_{\mathrm{w}}$。

$$p_{\mathrm{mix}} = [f\rho_{\mathrm{f}} + (1-f)\rho_{\mathrm{w}}]gl = \rho_{\mathrm{w}}gl - f(\rho_{\mathrm{w}} - \rho_{\mathrm{f}})\,gl$$
$$p_{\mathrm{sep}} = \rho_{\mathrm{f}}gh + \rho_{\mathrm{w}}g(l-h) = \rho_{\mathrm{w}}gl - (\rho_{\mathrm{w}} - \rho_{\mathrm{f}})gh$$
$$p_{\mathrm{mix}} - p_{\mathrm{sep}} = \left(\frac{h}{l} - f\right)(\rho_{\mathrm{w}} - \rho_{\mathrm{f}})gl > 0$$

因為從瓶身的形狀(細口寬底)我們可以判斷 $\frac{h}{l} > f$。

註:如果缺了「發生油水分離不會影響整個液體的體積」這個條件，則答案是(D)。

六、

參考解答：(7) 2 m/s ， (8) 300 J

(7) 長桿質量可以忽略，所以系統質心落於兩太空人的正中央。整個系統所受的外力為0，所以系統質心執行慣性運動，可把系統質心當成參考系原點。

前後系統相對於質心的轉動慣量分別為 $I_i = 2mr_i^2$ 與 $I_f = 2mr_f^2 = I_i/4,$

角動量守恆 $I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow \omega_f = I_i\omega_i/I_f = 4\omega_i,$

太空人繞著系統質心的速率 $v_f = r_f\omega_f = \frac{r_i}{2}\cdot 4\omega_i = 2v_i = 2\cdot 5\ \mathrm{m}\cdot\frac{2\pi}{10\pi\ \mathrm{s}} = 2\ \mathrm{m/s}$

(8) 轉動動能改變了 $E_f - E_i = \frac{1}{2}\cdot 2m\left(v_f^2 - v_i^2\right) = 300\ \mathrm{J}$

七、

參考解答：(9) $\frac{\rho A v^2 \sin\theta}{mg + \rho A v^2 \cos\theta}$

(9) 氣體受力（完全非彈性碰撞）:

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{(-mv)}{dt} = \frac{-(\rho A dx)v}{dt} = -\rho A v^2$$

楔形體受氣體之力：$F = \rho A v^2$

楔形體靜力平衡：$N = mg + F\cos\theta,\quad f = F\sin\theta$ （其中N為正向力，f為摩擦力。）

$$f = \mu N \Rightarrow \mu = \frac{f}{N} = \frac{F\sin\theta}{mg + F\cos\theta} = \frac{\rho A v^2 \sin\theta}{mg + \rho A v^2 \cos\theta}$$

八、

參考解答：(10) <u>(C)</u>

(10) (A)(B) 圓盤滾至斜面低點的速度只與斜面傾角有關。

(C) 傾角越大，靜摩擦力越大，圓盤轉動加速度越大，滾至低點的速度越快。

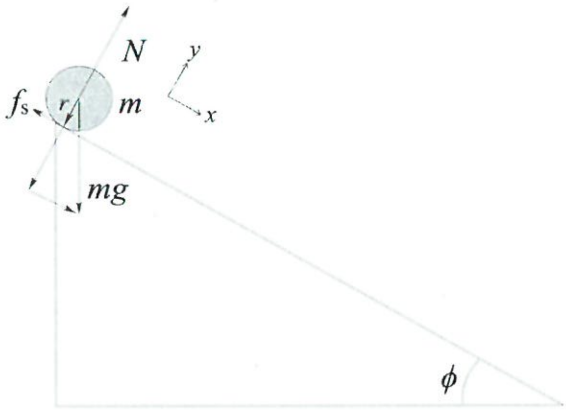
(D) 純滾動不損耗力學能。

(E) 純滾動至低點的速度，在月球上必比在地球上小。

九、

參考解答：(11) $\mu_s \geq \frac{1}{3}\tan(\phi)$

(11)



$$F_y = N - mg\cos(\phi) = ma_y = 0$$

$$F_x = mg\sin(\phi) - f_s = ma_x \ldots (*)$$

靜摩擦力提供轉動力矩：

$\tau = rf_s = I\alpha$，

其中 $I = I_{\text{disk}} = \frac{1}{2}mr^2$，

而 $\alpha = a_x/r \Rightarrow f_s = \frac{1}{2}ma_x$

代入(*) $\Rightarrow mg\sin(\phi) = \frac{3}{2}ma_x \Rightarrow a_x = \frac{2}{3}g\sin(\phi) \Rightarrow f_s = \frac{1}{2}ma_x = \frac{1}{3}mg\sin(\phi)$

須確保此靜摩擦力量值不超過靜摩擦力上限值，才能確保純滾動不滑動，即：

$$f_s \leq \mu_s N \quad \Rightarrow \frac{1}{3}mg\sin(\phi) \leq \mu_s mg\cos(\phi) \Rightarrow \mu_s \geq \frac{1}{3}\tan(\phi)$$

十、

參考解答：(12) $T = 2\pi\sqrt{\frac{8k}{3m}}$

(12) 設彈簧的伸長量為y，而滑輪產生上下振盪，則圓盤上在細繩上轉動的長度為$\frac{y}{2} = R\theta$，

其中θ是圓盤相對質心轉動的角度，即$y = 2R\theta$。考慮右邊細繩上的一固定點計算力矩，則力矩方程式可以寫成

$$R \times mg - 2R \times \left[\frac{1}{2}mg + k(2R\theta)\right] = I\alpha = (I_{CM} + mR^2)\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} \qquad (1)$$

其中I為轉動慣量，依據平行軸定理，相對於右邊細繩上的固定點，I等於$I_{CM} + mR^2$，α為角加速度等於$\ddot{\theta}$；(1)式可以簡化為

$$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}+4kR^2\theta=\frac{3}{2}m\ddot{\theta}+4k\theta=0 \tag{2}$$

類比於$ma+kx=0=m\frac{d^2x}{dt^2}+kx$的週期$T=2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$，由(2)式可以得到

$$T=2\pi\sqrt{\frac{8k}{3m}} \tag{3}$$

(1)式也可是寫成$-2Rky=\frac{3}{4}mR\frac{d^2y}{dt^2}$，也可以得到(3)式的結果。

另解：以能量守恆的觀點求出運動方程式與週期

系統的總能量E為

$$E=\frac{1}{2}ky^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \tag{4}$$

依照前述的討論，其中$I=I_{CM}+mR^2$，$\omega^2=\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\dot{\theta}^2$，而$y=2r\theta$，因此

$$E=2kR^2\theta^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2+mR^2\right)\dot{\theta}^2=2kR^2\theta^2+\frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2 \tag{5}$$

因為系統總能量守恆，即$\frac{dE}{dt}=0$；故

$$\frac{dE}{dt}=0=4kR^2\theta\dot{\theta}+\frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} \tag{6}$$

整理得$0=4k\theta+\frac{3}{2}m\ddot{\theta}$，同(2)式；因此依據簡諧振盪公式得週期與(3)式相同

$$T=2\pi\sqrt{\frac{8k}{3m}}$$

十一、

參考解答：(13) $\left|\frac{1-cos\alpha}{1-cos\theta}\right|^{\frac{1}{2n}}$

(13) 因為剛體 m 在 n 次反彈之後所達的最遠端和鉛垂線的夾角比起始位置小，所以其力學能減少，代表 m、M 之間的碰撞為非彈性碰撞，每一次碰撞的初速(撞擊瞬間的速度)為 u_i，末速(反彈瞬間的速度)為 v_i，則恢復係數 $|\varepsilon|=\left|\frac{v_i}{u_i}\right|$。

因為忽略空氣阻力和懸掛點的摩擦力，則 $|u_{i+1}|=|v_i|$，故 $|v_n|=|\varepsilon|^n\,|u_1|$。

由於 $\frac{1}{2}mu_1^2=mgL(1-cos\theta)$ 且 $\frac{1}{2}mv_n^2=mgL(1-cos\alpha)$，故求得

$$|\varepsilon| = \sqrt[n]{\left|\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\theta}\right|^{\frac{1}{2}}} = \left|\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\theta}\right|^{\frac{1}{2n}}$$

十二、

參考解答：(14) (D)

(14) 單位時間內撞擊空氣分子數正比於 v，故動量變化量正比於 v^2。

十三、

參考解答：(15) 0.484 MPa ，(16) 28.5 kW

(15) 依據白努利定理，在水泵進水口處，每單位體積的水，其動能與重力位能，加上該處的壓力P_{in}，總和為

$$P_0(\text{水面}) = P_{\text{in}} + \frac{1}{2}\rho v_{\text{i}}^2 + (-\rho g h) \tag{1}$$

上式中P_0與P_{in}分別為大氣壓力與水泵進水口處的壓力，v_{in}為進水口處的水流速率；因進水口與出水口的截面積相同，由連續性方程式可知水泵出水口處的水流速率$v_{\text{out}} = v_{\text{in}}$。如令出水口處的壓力為$P_{\text{out}} = P_{\text{in}} + \Delta P$，$\Delta P$為壓力差，則就水泵出水口與噴嘴兩處，再次利用白努利定理，可得

$$P_{\text{in}} + \Delta P + \frac{1}{2}\rho v_{\text{i}}^2 + (-\rho g h) = P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g H \tag{2}$$

由(1)、(2)兩式可得

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g H = 1.00 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 30.0^2 + 9.80 \cdot 3.50\right) \text{ kPa} = \boxed{0.484} \text{ MPa} \tag{3}$$

在噴嘴處，水的體積流率為$\frac{1}{4}\pi d^2 v$，故水泵提供的功率為

$$W = \frac{1}{4}\pi d^2 v \Delta P = \frac{\pi}{4}(5.00 \times 10^{-2})^2 \cdot 30.0 \cdot 4.84 \times 10^5 \text{ W} = \boxed{28.5} \text{ kW} \tag{4}$$

十四、

參考解答：(17) $f = \frac{2d}{t L \sin\theta}$

(17) 如圖所示，超聲波的入射、反射角為 θ，且偵測器 B 在時間 t 測到 A 所發出的超聲波，所以超聲波的波速 $v_s = \left(\frac{2d}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{t}\right)$。兩端開口細圓管中的空氣柱會將第二諧音的強度放大，所以此第二諧音的波長 $\lambda = L$，對應的頻率 $f = \frac{v_s}{\lambda} = \frac{2d}{t L \sin\theta}$。當 B 能測到最強的訊號時，儀器 A 的振動頻率和細圓管空氣柱的第二共振諧音頻率相同，是 $f = \frac{2d}{t L \sin\theta}$。

十五、

參考解答：(18) $\underline{\ 0.750\ \text{kg/m}^3\ }$ ，(19) $\underline{\ 475\ \text{K}\ }$ ， (20) $\underline{\ 5.66\times10^7\ \text{J}\ }$

(18) 當氣球可以開始升空時，其所受浮力$F_\text{B}=\rho_0V_0g$，而此時囊內熱空氣的重量為$\rho_\text{f}V_0g$，氣囊和氣球其他部分的總重量為mg，故得

$$\rho_0V_0g=\rho_\text{f}V_0g+mg \quad\Rightarrow\quad \rho_\text{f}=\rho_0-\frac{m}{V_0} \tag{1}$$

代入數值，可得 $\rho_\text{f}=\rho_0\left(1-\frac{m}{V_0\rho_0}\right)=\frac{1.25\left(1-\frac{200.}{450.}\right)\text{kg}}{\text{m}^3}=0.750\ \text{kg/m}^3$ (2)

(19) 令M代表空氣的莫耳質量，R代表通用氣體常數，因ρ_f為空氣在絕對溫度T_f時的密度， 故根據理想氣體方程式，可得

$$P_0=\frac{\rho_0}{M}RT_0,\qquad P_0=\frac{\rho_\text{f}}{M}RT_\text{f}\quad\Rightarrow\quad T_\text{f}=\left(\frac{\rho_0}{\rho_\text{f}}\right)T_0 \tag{3}$$

由(2)與(3)式，可求得

$$T_\text{f}=\left(\frac{\rho_0}{\rho_\text{f}}\right)T_0=\left(\frac{1.25}{0.750}\right)285\ \text{K}=475\ \text{K} \tag{4}$$

(20) 令充滿氣囊之熱空氣的莫耳數為n_f，則由理想氣體公式可得

$$n_\text{f}=\frac{P_0V_0}{RT_\text{f}}, \tag{5}$$

雙原子理想氣體的定壓莫耳熱容c_P為$7R/2$，故燃燒器須提供之能量Q為

$$Q=n_\text{f}c_\text{P}(T_\text{f}-T_0)=\frac{P_0V_0}{RT_\text{f}}\frac{7R}{2}(T_\text{f}-T_0)=\frac{7}{2}P_0V_0\left(1-\frac{T_0}{T_\text{f}}\right) \tag{6}$$

代入數值可得

$$Q=\frac{7}{2}P_0V_0\left(1-\frac{T_0}{T_\text{f}}\right)=\frac{7}{2}(1.01\times10^5)(400.)\left(1-\frac{285}{475}\right)\text{J}=\boxed{5.66\times10^7}\ \text{J} \tag{7}$$

十六、

參考解答：(21) $\underline{\ -\left(\frac{2\,e\,\sigma}{\rho\,\pi\,r\,L}\right)(T_1^4-T_2^4)\,(r+h)\ }$

(21) 液體在時間 t (高度 h)時因為熱輻射的吸熱功率為

$P_{in}=e\,\sigma\,(2\pi r^2+2\pi\,r\,h)\,(T_1^4-T_2^4)$，藉由汽化消耗熱的功率則是

$P_{out}=\frac{d}{dt}(\rho\,\pi\,r^2\,h\,L)=(\rho\,\pi\,r^2\,L)(\frac{dh}{dt})$。

那麼 $P_{in} + P_{out} = 0$，故 $(\frac{dh}{dt}) = -(\frac{2\,e\,\sigma}{\rho\,\pi\,r\,L})\,(T_1^4 - T_2^4)\,(r+h)$

十七、

參考解答：(22) <u>(E)</u>

(22) 乙波波前上方部分因波速較快會超前下方，使光線向下偏折。

十八、

參考解答：(23) <u>21/2 PV</u>

(23) 用理想氣體方程式可得

$$n_1 = \frac{PV}{RT}\ ,\ n_2 = \frac{6PV}{4RT}$$

單原子氣體分子莫耳定容比熱為$C_v = \frac{3}{2}R$

內能: $U_f = C_v(n_1T_1 + n_2T_2) = \frac{3}{2}R\left(\frac{PV}{RT}\times T + \frac{6PV}{4RT}\times 4T\right) = \frac{21}{3}PV$

十九、

參考解答：(24) <u>$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$</u>，(25) <u>$v = (a_0GM)^{1/4}$</u>，(26) <u>$\frac{1}{4\pi R_0^2}\frac{V_0^2}{G}$</u>

(24) $F = \frac{GMm}{r^2} = ma = m\frac{v^2}{r},\ v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

(25) $F = \frac{GMm}{r^2} = m\frac{a^2}{a_0} = m\frac{v^4}{a_0r^2},\ v = (a_0GM)^{1/4}$

也就是說，非常遠離銀河中心的星體，其繞行速度 v 幾乎為常數。

這個預測，相當符合觀測到的結果。

(26) 太陽系繞銀河中心的速度為

$$\frac{V_0^2}{R_0} = \frac{G(M+M_{DM}(R_0))}{R_0^2} \Longrightarrow V_0^2 = \frac{G\big(M+M_{DM}(R_0)\big)}{R_0}$$

其中 M 銀河中恆星的質量，$M_{DM}(R_0)$為半徑為 R_0 球體內暗物質的質量。由上式可得，

$$M_{DM}(R_0) = \frac{V_0^2}{G}R_0 - M$$

而$dM_{DM}(R) = 4\pi R^2\rho(R)dR \ \Longrightarrow \rho(R) = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{dM_{DM}(R)}{dR}$

可得：$\rho(R_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{dM_{DM}(R)}{dR}\Big|_{R=R_0} = \frac{1}{4\pi R_0^2}\frac{V_0^2}{G}$

二十、

參考解答：(27) $A\cos(\omega^2 x/g-\omega t)$ ， (28) $4\cos^2\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(\frac{2\omega}{g}x-t\right)\right]$

(27) $f_0(x,t)=A\cos(kx-\omega t)$。

決定k： $v=\omega/k=\sqrt{g/k}$

$\Rightarrow \quad \omega^2/k^2=g/k \quad \Rightarrow \quad k=\omega^2/g$ ，

$\Rightarrow \quad f_0(x,t)=A\cos(\omega^2 x/g-\omega t)$ 。

(28) $f(x,t)=2A\cos(kx-\omega t)+A\cos(k_+x-\omega_+t)+A\cos(k_-x-\omega_-t)$，

這裡 $k_\pm=k\pm\Delta\omega\, dk/d\omega=\omega^2/g\pm 2\omega\Delta\omega/g$，另外$\omega_\pm=\omega\pm\Delta\omega$。

定義$\Phi=kx-\omega t$，$\Delta\Phi=\Delta kx-\Delta\omega t$。

$f(x,t)=2A\cos(\Phi)+A\cos(\Phi+\Delta\Phi)+A\cos(\Phi-\Delta\Phi)$，

$f(x,t)=A[\cos(\Phi+\Delta\Phi/2-\Delta\Phi/2)+\cos(\Phi+\Delta\Phi/2+\Delta\Phi/2)]$
$+A[\cos(\Phi-\Delta\Phi/2+\Delta\Phi/2)+\cos(\Phi-\Delta\Phi/2-\Delta\Phi/2)]$，

$f(x,t)=2A\cos(\Phi+\Delta\Phi/2)\cos(\Delta\Phi/2)+2A\cos(\Phi-\Delta\Phi/2)\cos(\Delta\Phi/2)$，

$f(x,t)=4A\cos(\Phi)\cos^2(\Delta\Phi/2)=4f_0(x,t)\cos^2(\Delta\Phi/2)$ 。

$F(x,t)=4\cos^2\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(\frac{2\omega}{g}x-t\right)\right]$

二十一、

參考解答：(29) $(11/12)L$ ， (30) $\frac{M(11M^2+12mM+3m^2)}{2(m+M)(m+2M)(m+3M)}L$

(29) 三根積木要保持平衡的條件為：

$x_1\le(L-x_1)\Rightarrow x_1\le L/2$

$x_2+(x_1+x_2)\le(L-x_2)+[L-(x_1+x_2)]\Rightarrow 2x_1+4x_2\le 2L$

$\Rightarrow x_2\le L/4$

$x_3+(x_2+x_3)+(x_1+x_2+x_3)\le(L-x_3)+[L-(x_2+x_3)]+[L-(x_1+x_2+x_3)]$

$\Rightarrow 2x_1+4x_2+6x_3\le 3L$

$\Rightarrow x_3\le L/6$

$x=x_1+x_2+x_3\le(11/12)L$

(30) 當最上層積木上另外還有一個質量為m質點時，上面三根積木要保持平衡的條件變為：

$(Mx_1/L)\frac{x_1}{2}+mx_1\le[M(L-x_1)/L]\frac{(L-x_1)}{2}$

$\Rightarrow mx_1\le(M/2L)[(L-x_1)^2-x_1^2]\Rightarrow mx_1\le M(L-2x_1)/2$

$\Rightarrow (m+M)x_1 \le \frac{ML}{2} \Rightarrow x_1 \le \frac{ML}{2(m+M)}$

$(Mx_2/L)\frac{x_2}{2} + [M(x_1+x_2)/L]\frac{(x_1+x_2)}{2} + m(x_1+x_2)$

$\le [M(L-x_2)/L]\frac{(L-x_2)}{2} + M\{[L-(x_1+x_2)]/L\}\frac{[L-(x_1+x_2)]}{2}$

$\Rightarrow m(x_1+x_2) \le M(L-2x_2)/2 + M\,[L-2(x_1+x_2)]/2$

$\Rightarrow m(x_1+x_2) + Mx_2 + M(x_1+x_2) \le ML$

$\Rightarrow (m+M)x_1 + (m+2M)x_2 \le ML \Rightarrow x_2 \le \frac{ML}{2(m+2M)}$

$(Mx_2/L)\frac{x_3}{2} + [M(x_2+x_3)/L]\frac{(x_2+x_3)}{2} + [M(x_1+x_2+x_3)/L]\frac{(x_1+x_2+x_3)}{2} + m(x_1 +$

$x_2 + x_3)$

$\le [M(L-x_3)/L]\frac{(L-x_3)}{2} + M\{[L-(x_2+x_3)]/L\}\frac{[L-(x_2+x_3)]}{2}$

$+M\{[L-(x_1+x_2+x_3)]/L\}\frac{[L-(x_1+x_2+x_3)]}{2}$

$\Rightarrow m(x_1+x_2+x_3) \le M(L-2x_3)/2 + M\,[L-2(x_2+x_3)]/2$

$+M\,[L-2(x_1+x_2+x_3)]/2$

$\Rightarrow m(x_1+x_2+x_3) + Mx_3 + M(x_2+x_3) + M(x_1+x_2+x_3) \le 3ML/2$

$\Rightarrow (m+M)x_1 + (m+2M)x_2 + (m+3M)x_3 \le 3ML/2 \Rightarrow x_3 \le \frac{ML}{2(m+3M)}$

故$x = x_1 + x_2 + x_3 = \left[\frac{ML}{2(m+M)} + \frac{ML}{2(m+2M)} + \frac{ML}{2(m+3M)}\right] = \frac{M(11M^2+12mM+3m^2)L}{2(m+M)(m+2M)(m+3M)}$。

貳、計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

第一題參考解答

(a) 在距離地球表面 160 km 處以圓形軌道運行時，衛星的運行速率為：

$$\frac{mv^2}{(R+h)} = \frac{GMm}{(R+h)^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)}} \approx 7.82\ \mathrm{km/s}$$

其所受空氣阻力產生的切線方向加速度

$$a_t = \frac{kv}{m} = \frac{S\rho v^2}{m} \approx \frac{1\times10^{-9}\times(7.82\times10^3)^2}{100} \approx 6.12\times10^{-4}\ \mathrm{m/s^2}$$

此時衛星的向心加速度為 $a_r = \frac{GM}{(R+h)^2} \approx 9.35\ \mathrm{m/s^2}$

故二者的比值約為：$\dfrac{a_t}{a_r} = \dfrac{6.12\times10^{-4}}{9.35} \approx 6.5\times10^{-5} \approx \dfrac{1}{15000}$

(b) 此由於空氣阻力的作用，衛星的總力學能將不再守恆。其力學能的改變量來自空氣阻力在衛星於Δt時間內產生之位移時所做的功，可表為：

$\Delta E = W = F\Delta s$; 其中$\Delta s = v\cdot\Delta t$。

因$F = -kv \rightarrow \frac{\Delta E}{\Delta t} = -kv^2$

由題設知，雖然衛星的運行軌道在空氣阻力作用下，將由正圓形轉變為類似螺旋線軌跡，但在任何時刻，其速率和軌道半徑間的關係仍為：

$$m\frac{[v(t)]^2}{r(t)} = G\frac{Mm}{[r(t)]^2} \rightarrow [v(t)]^2 = G\frac{M}{r(t)}$$

圓形軌道衛星的力學能：$E = U + K = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2$

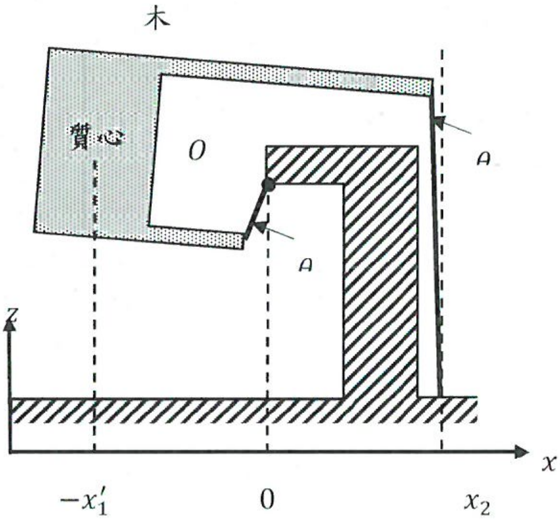
故 $\Delta E = \frac{-m(v+\Delta v)^2}{2} - \left(-\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{-2mv\Delta v}{2} - \frac{m(\Delta v)^2}{2} \approx -mv\Delta v$（忽略$(\Delta v)^2$）

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = -mv\frac{\Delta v}{\Delta t} = -kv^2 \rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{k}{m}v$$

亦即在空氣阻力的作用下，該衛星的速率將隨時間而增加，直至墜落大氣層燃燒消失。此乃因力學能減少的速度小於位能減少的速度（因軌道半徑亦隨時間在縮小），故呈現在阻力作用下，衛星的動能（即速率）不減反增。（註：由於上式中k亦為v的函數，且隨著v增大，其關係將變為更複雜，故一般來說衛星墜落的軌跡需藉用電腦模擬。）

第二題參考解答：

(a) 以O點為支點，欲達力矩平衡，T_2 需朝$-z$方向，再利用力平衡可知T_1朝$+z$方向，故使木塊懸浮之力的量值為$T_1 - T_2$。



(b)

(i) 取平衡時由力矩平衡可得$mgx_1 = T_2x_2$，由力平衡可得$T_1 = mg + T_2$，由此可以解得

$$T_1 = \frac{x_1 + x_2}{x_2} mg,$$

$$T_2 = \frac{x_1}{x_2} mg。$$

(ii) 當木塊小幅度向左偏離平衡點時，質心的x座標成為$-x_1'$，兩細繩也偏離鉛直線，設偏離角度各為θ_1與θ_2如右圖所示。當$\theta_1 \ll 1$且$\theta_2 \ll 1$，木塊x軸方向的偏移量為

$$x_1' - x_1 = L_1\theta_1 = L_2\theta_2 \dots\dots\dots\dots (1)$$

設此時長度為L_1與L_2之細繩上的張力量值各為T_1'與T_2'，則木塊x軸方向的運動方程式為

$$T_1'\theta_1 + T_2'\theta_2 = m\frac{d^2x_1'}{dt^2} \dots\dots (2)$$

當(2)式精確到偏移量之線性項，$T_1' = T_1$，$T_2' = T_2$，結合式(1)與(2)消去θ_2可得

$$mL_1\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \left(T_1 + \frac{L_1}{L_2}T_2\right)\theta_1。$$

故振盪角頻率為$\omega^2 = \frac{1}{mL_1}\left(T_1 + \frac{L_1}{L_2}T_2\right)$，將$T_1$與$T_2$代入可得頻率為

$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L_1} + \frac{x_2}{x_1}\frac{(L_1+L_2)g}{L_1L_2}}$。