

國立彰化高級中學 115 學年度科學班甄選 實驗實作 【數學科】 試題卷

一、填充題（1-3 題每格 5 分；4-13 題每格 6 分，共 75 分）

1. 一個正整數 n ，加上 168 或加上 100 後都是一個完全平方數，求 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

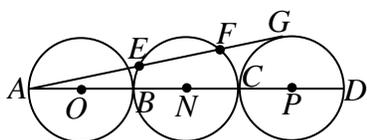
2. 滿足 $n^{306} < 7^{408}$ 之最大正整數 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 已知 $a < 0, b < 0$ ，化簡 $\sqrt{a^2} - \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}} + 2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化至最簡式)

4. 某人於下午三點多看錶後出門，到了晚上八點多回家再看錶，發現出門時及回家時之分針、時針恰在相反位置，問他何時回家？答： $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 若一矩形長為 x 、寬為 y 滿足 $x+y=1, x^4+y^4=\frac{1}{2}$ ，試求此矩形的面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 如下圖，圓 N 與圓 O ，圓 P 均相外切， \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 分別是他們的直徑，且 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 30$ ，又 \overline{AG} 與圓 P 相切於 G ，且交圓 N 於 E 、 F ，則 $\overline{EF} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

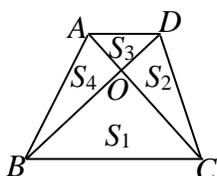


7. 如下圖，梯形 $ABCD$ 的兩條對角線 \overline{AC} 、 \overline{BD} 交於 O ， $\triangle OBC$ 、 $\triangle OCD$ 、 $\triangle ODA$ 、 $\triangle OAB$ 及梯形 $ABCD$ 的面積分別為 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 及 S ，對於以下(甲)、(乙)、(丙)三個推論：

(甲) 已知 $S_1 : S$ ，就可以求出 $\overline{AD} : \overline{BC}$ 。

(乙) 已知 $(S_1 + S_2) : S$ ，就可以求出 $\overline{AD} : \overline{BC}$ 。

(丙) 已知 $S_2 : S$ ，就可以求出 $\overline{AD} : \overline{BC}$ 。問那些推論是正確的？答： $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(全對才給分)

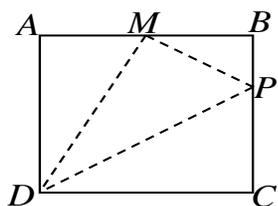


8. 設 $p^3 - 2p + p$ 恰有 50 個正因數，試求最小的質數 $p = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 已知三個不等式 $\frac{x+3}{3} > \frac{x-1}{5} + \frac{2}{3}$ ， $\frac{x+1}{3} - \frac{x+2}{2} > -\frac{1}{6}$ ， $5(x-a) > 3x-a$ 的解為 $2a < x < -3$ ，求 a 的範圍為

10. 甲乙兩車分別從 A 、 B 兩地出發，相向而行。出發時，甲乙的速度比為 $5:4$ ，相遇後，甲的速度減少 20% ，乙的速度增加 20% ，這樣當甲到達 B 地時，乙離 A 地還有 8 公里，求 A 、 B 兩地的距離為_____公里。

11. 設矩形 $ABCD$ 中， $\overline{AB}=2$ 、 P 為 \overline{BC} 上一點，若 $\triangle PCD$ 沿 \overline{PD} 摺疊，使頂點 C 恰好落在 \overline{AB} 的中點 M 上，如下圖，試求 $\overline{PB} =$ _____。



12. 坐標平面上有 $A(0, 2)$ 、 $B(-1, 3)$ 兩點，若 C 點在直線 $y=1$ 上使得 $\triangle ABC$ 為等腰三角形，試求所有這樣的 C 點 x 坐標總和為_____。

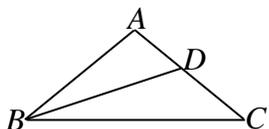
13. 設正八邊形 $OABCDEFG$ 中， $O(0, 0)$ ， $D(4, 2\sqrt{2})$ 且 A 點在第四象限，試求 A 點坐標為_____。

二、計算證明題：(要有詳細過程，共 25 分)

1. 若實數 a, b 滿足 $2a + b^2 = 17$ ，試求 $a + 2b$ 的最大值。(8 分)

2. 如下圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\angle A = 100^\circ$ ， $\angle ABC$ 的平分線交 \overline{AC} 於 D 。

求證： $\overline{AD} + \overline{BD} = \overline{BC}$ (9 分)



3. 已知半徑為 1 的半圓內有一等腰梯形，梯形的下底為直徑，求此梯形周長的最大值。(8 分)

(參考提示：作簡圖，可假設腰長為 x)