

北北基高級中等學校
115 學年度學科能力測驗聯合模擬考試
數學考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

—作答注意事項—

考試範圍：第一～二冊

考試時間：100 分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正帶（液）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上的第 18-1 列的 $\frac{3}{8}$ 與第 18-2 列的 $\frac{8}{8}$ 劃記，如：

18-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
18-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{19-1} \textcircled{19-2}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 $\frac{-7}{50}$ 與第 19-2 列的 $\frac{7}{50}$ 劃記，如：

19-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
19-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

選擇(填)題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

祝考試順利



99362203-35

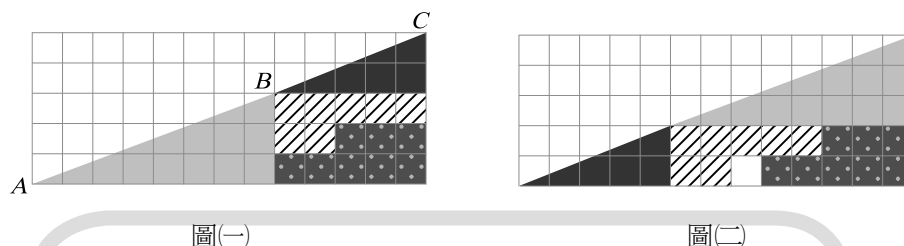
版權所有 · 翻印必究

第壹部分、選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

1. 下圖是一網路謎題「失蹤的正方形」：圖(一)是由 4 個不同花色拼圖構成的圖形，當把拼圖的位置稍做調整後得到圖(二)的圖形，發現竟然多出了一個空格。這個看似不可思議的謎題，其實可以利用數學裡學到的斜率概念來解釋。在圖(一)中，每一小格皆為邊長 1 的正方形，我們令線段 AB 的斜率為 $m_{\overline{AB}}$ ，線段 BC 的斜率為 $m_{\overline{BC}}$ ，試求 $m_{\overline{AB}} - m_{\overline{BC}}$ 之值為何？



- (1) 0 (2) 1 (3) -1 (4) $\frac{1}{6}$ (5) $-\frac{1}{40}$

2. 設 a 為實數， $0^\circ < \angle A < 180^\circ$ ， $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ，若點 $(\cos A, \log a)$ 位於坐標平面的第二象限，試問點 $\left(\sin B, \log \frac{1}{a}\right)$ 位於坐標平面的何處？
- (1) 第一象限 (2) 第二象限 (3) 第三象限
(4) 第四象限 (5) x 軸上

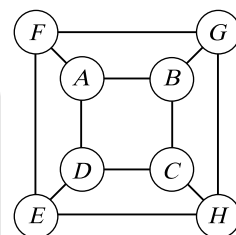
3. 已知 $a = \log 3$ ， $b = \log 5$ ，試求 $100^a + \left(\frac{1}{100}\right)^b$ 之值為何？
- (1) $\frac{7}{2}$ (2) $\frac{9}{25}$ (3) $\frac{226}{25}$ (4) 9 (5) 15

4. 已知目前離太陽系最近的恆星為毗鄰星，距離約 4.2 光年。若將此距離改為 N 公里， $N=10^a$ ，其中 a 為實數，且光速約為每秒 3×10^8 公尺，一年約為 3.1×10^7 秒，試估算 N 值最接近下列哪一個選項？(註：「光年」為光在真空中一年時間內直線傳播的距離)

- (1) $10^{15.602}$
- (2) $10^{15.477}$
- (3) $10^{12.602}$
- (4) $10^{12.477}$
- (5) $10^{13.602}$

5. 設 $A、B、C、D、E、F、G、H$ 為 8 個城市，部分城市間有道路相連，如右圖所示。若由 A 城市出發玩遍所有城市，並且最後回到 A 城市，為了節省旅費，除了 A 城市外，每個城市只能去一次，試求會有多少種路線？

- (1) 12 種
- (2) 18 種
- (3) 24 種
- (4) 36 種
- (5) 72 種



6. 在坐標平面上， $O(0, 0)$ 與 $A(4, 0)$ 為兩定點， P 點為方程式 Γ 上的動點， $\Gamma: (x-2)^2 + y^2 = 4, y > 0$ 。當 $\triangle OAP$ 有最大面積時，試求此時 $\triangle OAP$ 內切圓圓心的 y 坐標為何？

- (1) $2(\sqrt{3} - 1)$
- (2) $2(\sqrt{2} - 1)$
- (3) $\sqrt{2} - 1$
- (4) $\sqrt{3} - 1$
- (5) $\sqrt{5} - 1$

二、多選題（占 25 分）

說明：第 7 題至第 11 題，每題 5 分。

7. 已知符號 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，例如： $[2.6]=2$ 、 $[-2.6]=-3$ 。下列選項哪些正確？

- (1) $[\pi]=4$
- (2) $[\sin 30^\circ]=1$
- (3) $[\cos 120^\circ]=-1$
- (4) $[\sin 160^\circ]+[\sin 200^\circ]=-1$
- (5) $[\sin 40^\circ]+[\sin 80^\circ]+[\sin 120^\circ]+[\sin 160^\circ]+\cdots+[\sin 680^\circ]+[\sin 720^\circ]=-8$

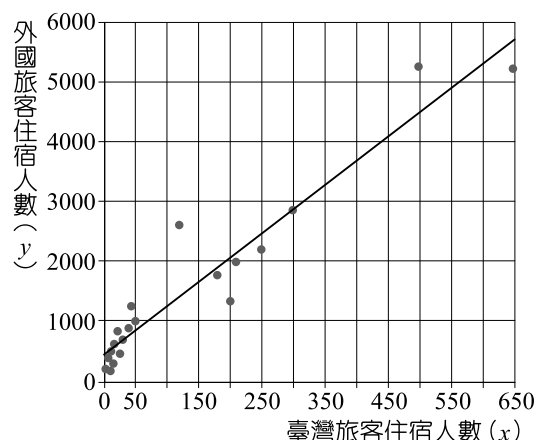
8. 在坐標平面上，一次函數 $g(x)=m(x-1)+1$ 的圖形與三次函數 $f(x)=a(x-1)^3-4(x-1)+q$ 的圖形由右至左相交於 A 、 B 、 C 三點，已知 $y=f(x)$ 函數圖形的對稱中心為 (k, k) ，且 A 點的坐標為 $(2, 0)$ ，則下列敘述哪些正確？

- (1) $a=3$ 且 $q=-1$
- (2) $m=1$
- (3) C 點坐標為 $(0, 2)$
- (4) $f(x)=0$ 有 1 個正實數解與 2 個負實數解
- (5) $\overline{AB} = \overline{BC}$

9. 設有 7 人依序坐成一列，且每人手中都有一枚均勻的硬幣。現在 7 人同時投擲自己手中的硬幣一次，若出現正面則依然坐著，若出現反面則站起來，關於 7 人最後坐或站狀態的敘述，下列選項哪些正確？

- (1) 7 人坐著或站起來的所有可能情況共有 $7!=5040$ 種
- (2) 恰有 2 人坐著的可能情況有 21 種
- (3) 恰有 3 人坐著的機率為 $\frac{1}{35}$
- (4) 恰有 3 人坐著且沒有相鄰兩人是坐著的機率為 $\frac{1}{35}$
- (5) 沒有相鄰兩人都是坐著的機率為 $\frac{17}{64}$

10. 右圖為臺灣某年度 20 個縣市旅客住宿人數的散布圖，其中 $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ 表示臺灣旅客住宿人數， $y_1, y_2, \dots, y_{20}$ 表示外國旅客住宿人數。 $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ 的變異數為 σ_x^2 ， $y_1, y_2, \dots, y_{20}$ 的變異數為 σ_y^2 ， x 與 y 的相關係數為 r_{xy} 。定義總住宿人數 $z_i = x_i + y_i, i = 1, 2, \dots, 20$ 。下列選項哪些正確？



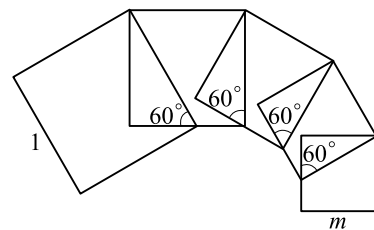
- (1) $r_{xy} > 0$
 - (2) 若 $y'_i = y_i + 1000$ ，則新數據的變異數 $\sigma_{y'}^2 = \sigma_y^2$
 - (3) 若 $x'_i = 2x_i$ ，則新數據的相關係數 $r_{x'y} = 2r_{xy}$
 - (4) 總住宿人數的變異數為 $\sigma_x^2 + \sigma_y^2$
 - (5) 若 $r_{xy} = 1$ ，總住宿人數的變異數會有最大值 $(\sigma_x + \sigma_y)^2$
11. 設二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 且 a, b, c 為整數，若 $f(1) = 0, 50 < f(9) < 60 < f(8) < 70$ ，下列選項哪些正確？
- (1) $a < 0$
 - (2) $b < 0$
 - (3) $f(9)$ 之值為 9 的倍數
 - (4) $10^b \times 10^c = 100$
 - (5) $\log(-4c) = 2$

三、選填題（占 30 分）

說明：第 12 題至第 17 題，每題 5 分。

12. 右圖為 5 個大小不同的正方形以特定的方式相連，已知左側最大的正方形邊長為 1，則右側最小的正方形邊長 m 為

$$\frac{\textcircled{12-1}}{\textcircled{12-2} \textcircled{12-3}} \quad \circ \text{ (化為最簡分數)}$$



13. 某觀光列車只有 A 、 B 兩種型式的車廂， A 型的車廂提供餐點、 B 型的車廂附設廁所。若車廂配置需滿足下列條件：

- ① 全列車恰有 9 節車廂
- ② A 型的車廂至少 2 節
- ③ B 型的車廂至少 4 節
- ④ B 型的車廂彼此不相鄰

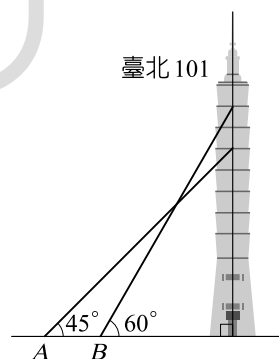
則此列車車廂的安排有 ⑬-1 ⑬-2 種方式。

14. 在坐標平面上， O 為原點且圓 C 的方程式為 $x^2 + y^2 = 20$ ，已知圓上有一點 $M(2, 4)$ 。若直線 L 與直線 OM 平行且與圓 C 交於 A, B 兩點。當 $\triangle OAB$ 的面積有最大值時，此時直線 L 的

方程式為 $y = ax \pm b$ ，則數對 $(a, b) =$ ⑭-1, ⑭-2 $\sqrt{⑭-3}$ 。(化為最簡根式)

15. 攝影師拍攝徒手攀登臺北 101 外牆的極限攀岩手艾力克斯·霍諾德 (Alex Honnold)，示意圖如右圖所示。一開始攝影師在 A 點拍攝艾力克斯的仰角為 45° ，而後攝影師朝著臺北 101 的方向直線前進 100 公尺到達 B 點，此時拍攝的仰角為 60° 。若兩次拍攝時攝影師與艾力克斯之間的距離恰好相同，則攝影師由 A 點前進到 B 點的這段時間裡，

艾力克斯攀爬的垂直高度差約為 ⑮-1 ⑮-2 公尺。(四捨五入至整數)



16. 多項式 $5x^7 + 17x^6 - 99x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 5x - 123 \times 2^{10}$ 除以 $x - 4$ 的餘式為 ⑯-1 ⑯-2 ⑯-3。

17. 設 p, q, r 為實數且 p, q, r 成等比數列，若三次函數 $f(x)$ 滿足 $f(q) = -q$ ，且 $y = f(x)$ 的

圖形在 $x = q$ 附近會近似於直線 $y = 3x - 32$ ，則 $p \times q \times r = \underline{\textcircled{17-1} \textcircled{17-2} \textcircled{17-3}}$ 。

第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，單選題每題 3 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇(填)題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

設 m, n 為正整數，並同時滿足兩條件：

① $m + n = 15$

② $1 + 2 + 3 + \cdots + m = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

試回答下列問題。

18. 設多項式函數 $f(x) = x^3 + 47x - 360$ ，試求函數值 $f(5)$ 為何？(單選題，3 分)

- (1) -360
- (2) -240
- (3) -120
- (4) 0
- (5) 120

19. 試求 $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 30^2 = ?$ (非選擇題，4 分)

20. 請根據第 18. 題，試求滿足題目條件①、②的數對 $(m, n) = ?$ (非選擇題，8 分)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 是 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

3. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$,

算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_X)^2 + (x_2 - \mu_X)^2 + \dots + (x_n - \mu_X)^2]}$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}[x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2] - n\mu_X^2}$$

4. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$,

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_X)(y_1 - \mu_Y) + (x_2 - \mu_X)(y_2 - \mu_Y) + \dots + (x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線 (最適直線) 方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \times \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

5. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\sqrt{7} \approx 2.646$
6. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 5 \approx 0.6990$ ， $\log 7 \approx 0.8451$