

北北基高級中等學校
115 學年度學科能力測驗聯合模擬考試

數學
考科
參考
答案
暨
詳解

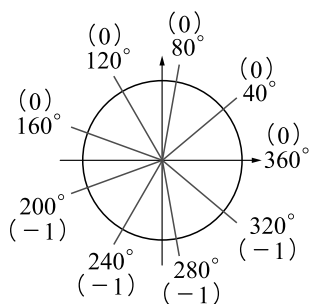
版權所有
翻印必究

翰林出版事業股份有限公司



版權所有 · 翻印必究

(4) ○：在單位圓上作各角度示意圖如下圖



$$[\sin 160^\circ] + [\sin 200^\circ] = 0 + (-1) = -1$$

(5) ○：承(4)

$$\begin{aligned} & [\sin 40^\circ] + [\sin 80^\circ] + [\sin 120^\circ] + \cdots + [\sin 320^\circ] \\ & + [\sin 360^\circ] \\ & = 0 + 0 + 0 + 0 + (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + 0 \\ & = -4 \end{aligned}$$

$$720 \div 360 = 2$$

$$\text{所求為 } (-4) + (-4) = -8$$

故選(3)(4)(5)。

8. (3)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：瞭解三次函數的圖形與對稱性

解析：(1) ×：\$y=f(x)\$ 圖形的對稱中心為 \$(1, q)=(k, k)\$

$$\Rightarrow q=1$$

$$A(2, 0) \text{ 在 } f(x)=a(x-1)^3-4(x-1)+q \text{ 上}$$

$$\Rightarrow a=3$$

(2) ×：\$A(2, 0)\$ 在 \$g(x)=m(x-1)+1\$ 上 \$\Rightarrow m=-1\$

(3) ○：\$g(x)=f(x)\$

$$\Rightarrow -(x-1)+1=3(x-1)^3-4(x-1)+1$$

$$\Rightarrow 3(x-1)^3-3(x-1)=0$$

$$\Rightarrow 3x(x-1)(x-2)=0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ 或 } 1 \text{ 或 } 2$$

$$\Rightarrow A(2, 0), B(1, 1), C(0, 2)$$

〈另解〉

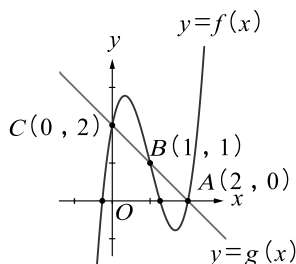
\$y=g(x)\$ 與 \$y=f(x)\$ 的圖形皆通過 \$A(2, 0)\$ 和對稱中心 \$(1, 1)\$ \$\therefore C(0, 2)\$

(4) ×：\$f(x)=3(x-1)^3-4(x-1)+1=0\$，且通過 \$A(2, 0)\$

$$\Rightarrow 3x^3-9x^2+5x+2=(x-2)(3x^2-3x-1)=0$$

$$\Rightarrow x=2 \text{ 或 } \frac{3 \pm \sqrt{21}}{6} \text{ (2 正實數解，1 負實數解)}$$

〈另解〉



如圖，\$f(x)\$ 有 2 正實數解，1 負實數解

(5) ○：承(3)，\$B\$ 點為對稱中心

$$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{BC}$$

故選(3)(5)。

9. (2)(5)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：排列與組合及機率

解析：(1) ×：\$2^7=128\$ 種

$$(2) \bigcirc：C_2^7 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21 \text{ 種}$$

$$(3) \times：\frac{C_3^7}{2^7} = \frac{35}{128}$$

(4) ×：設站著為符號 +，坐著不相鄰插空位則 4 個人站著，3 個人坐著不相鄰

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccccc} \wedge & + & \wedge & + & \wedge & + & \wedge \end{array}$$

$$\therefore C_3^5 = 10 \text{ 種}$$

$$\text{故機率為 } \frac{C_3^5}{2^7} = \frac{10}{128} = \frac{5}{64}$$

(5) ○：承(4)，站著的人先排，坐著的人插空位

0 人坐著 \$\Rightarrow 1\$ 種

$$1 \text{ 人坐著} \Rightarrow C_1^7 = 7 \text{ 種}$$

$$2 \text{ 人坐著} \Rightarrow C_2^6 = 15 \text{ 種}$$

$$3 \text{ 人坐著} \Rightarrow C_3^5 = 10 \text{ 種}$$

$$4 \text{ 人坐著} \Rightarrow C_4^4 = 1 \text{ 種}$$

$$\text{所求機率為 } \frac{1+7+15+10+1}{128} = \frac{34}{128} = \frac{17}{64}$$

故選(2)(5)。

10. (1)(2)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：統計量的意義與計算方式

解析：(1) ○：最適直線的斜率 \$m=r_{xy} \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\$，

其中 \$\sigma_x > 0, \sigma_y > 0\$

當 \$m > 0\$ 時，\$r_{xy} > 0\$

(2) ○：原始數據平移，變異數不變

(3) ×：\$x'_i=ax_i+b, y'_i=cy_i+d, a, b, c, d \in \mathbb{R}\$，

當 \$ac > 0, r_{x'y'}=r_{xy}\$

(4) ×：\$z_i=x_i+y_i, i=1, 2, \dots, 20\$，

$$\text{則 } \mu_z=\mu_x+\mu_y$$

$$\sigma_z^2=\frac{1}{n} [(z_1-\mu_z)^2+\cdots+(z_{20}-\mu_z)^2]$$

$$=\frac{1}{n} \{ [(x_1+y_1)-(\mu_x+\mu_y)]^2+\cdots+[(x_{20}+y_{20})-(\mu_x+\mu_y)]^2 \}$$

$$=\frac{1}{n} \{ [(x_1-\mu_x)+(y_1-\mu_y)]^2+\cdots+[(x_{20}-\mu_x)+(y_{20}-\mu_y)]^2 \}$$

$$=\sigma_x^2+\sigma_y^2+\frac{2}{n} [(x_1-\mu_x)(y_1-\mu_y)+\cdots+(x_{20}-\mu_x)(y_{20}-\mu_y)]$$

$$=\sigma_x^2+\sigma_y^2+2r_{xy}\sigma_x\sigma_y$$

當 \$r_{xy}=0, \sigma_z^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2\$ 方成立

(5) ○：承(4)，\$-1 \leq r_{xy} \leq 1\$

$$\text{當 } r_{xy}=1, \sigma_z^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2+2r_{xy}\sigma_x\sigma_y$$

$$=\sigma_x^2+\sigma_y^2+2\sigma_x\sigma_y$$

$$=(\sigma_x+\sigma_y)^2$$

故選(1)(2)(5)。

11. (1)(4)(5)

出處：第一冊〈指數、對數〉、第一冊〈多項式函數〉

目標：二次函數及其不等式的運算，以及指數律，常用對數的觀念與計算

解析：已知 $f(1)=a+b+c=0$, $c=-a-b$

$$\textcircled{1} f(8)=64a+8b+c=64a+8b+(-a-b) \\ =63a+7b=7(9a+b) \text{ 為 } 7 \text{ 的倍數}$$

$$\because 60 < f(8) < 70 \quad \therefore f(8)=63 \Rightarrow 9a+b=9$$

$$\textcircled{2} f(9)=81a+9b+c=81a+9b+(-a-b) \\ =80a+8b=8(10a+b) \text{ 為 } 8 \text{ 的倍數}$$

$$\because 50 < f(9) < 60 \quad \therefore f(9)=56 \Rightarrow 10a+b=7$$

$$\text{由 } \textcircled{1}、\textcircled{2} \text{ 知 } \begin{cases} 9a+b=9 \\ 10a+b=7 \end{cases}$$

$$\text{解聯立得 } a=-2, b=27$$

$$\text{代回 } c=-a-b=-25$$

$$\text{故 } f(x)=-2x^2+27x-25$$

$$(1) \bigcirc : a=-2 < 0$$

$$(2) \times : b=27 > 0$$

$$(3) \times : f(9)=56 \text{ 不為 } 9 \text{ 的倍數}$$

$$(4) \bigcirc : 10^b \times 10^c = 10^{b+c} = 10^2 = 100$$

$$(5) \bigcirc : \log(-4c) = \log 100 = 2$$

故選(1)(4)(5)。

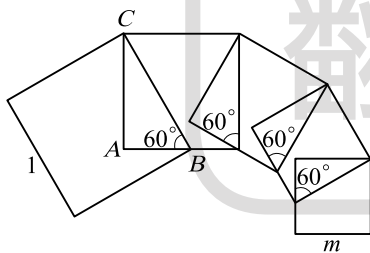
三、選填題

12. $\frac{9}{16}$

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：觀察圖形得到公比，進而求出等比數列的特定項

解析：



$$\because \overline{BC} : \overline{AC} = 2 : \sqrt{3}$$

$\therefore$ 各個正方形的邊長成等比數列，公比為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{可求得 } m = 1 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \frac{9}{16}.$$

13. 16

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：利用分類討論解決排列組合問題

解析：設 A 代表 A 型的車廂， B 代表 B 型的車廂

則 $A \geq 2$, $B \geq 4$, 且 $A+B=9$, B 不相鄰

$\Rightarrow A$ 先排， B 插空位

$$A \text{ 有 } 5 \text{ 個}, B \text{ 有 } 4 \text{ 個}: \begin{array}{cccccc} A & A & A & A & A & \\ \wedge & \wedge & \wedge & \wedge & \wedge & \end{array} \\ \Rightarrow C_4^6 = 15$$

$$A \text{ 有 } 4 \text{ 個}, B \text{ 有 } 5 \text{ 個}: \begin{array}{cccccc} A & A & A & A & & \\ \wedge & \wedge & \wedge & \wedge & \wedge & \end{array} \Rightarrow C_5^5 = 1$$

A 有 3 個， B 有 6 個： $\times$

A 有 2 個， B 有 7 個： $\times$

故有 $15+1=16$ (種)。

14. $(2, 5\sqrt{2})$

出處：第一冊〈多項式函數〉、第一冊〈直線與圓〉

目標：斜率、點到直線的距離、二次函數

解析：圓 C 的圓心為 $O(0, 0)$ ，半徑為 $\sqrt{20}$

$$\because m_{\overline{OM}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\therefore \text{可令直線 } L: 2x-y+k=0$$

$$\text{令圓心 } O \text{ 到直線 } L \text{ 的距離為 } d = \frac{|k|}{\sqrt{5}},$$

$$\text{則弦長 } \overline{AB} = 2\sqrt{20-d^2}$$

$$\triangle OAB \text{ 的面積為 } \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times d = d\sqrt{20-d^2} = \sqrt{20d^2-d^4}$$

令 $t=d^2$ ，即可看成求 $y=20t-t^2$ 的最大值，

$$\text{配方後得 } y=-(t-10)^2+100$$

$$\text{當 } t=10 \text{ 時}, \triangle OAB \text{ 的面積有最大值 } \sqrt{200-100}=10$$

$$d^2=10 \Rightarrow \frac{k^2}{5}=10 \Rightarrow k=\pm 5\sqrt{2}$$

$$\text{則直線 } L \text{ 方程式為 } 2x-y\pm 5\sqrt{2}=0$$

$$\Rightarrow y=2x\pm 5\sqrt{2}$$

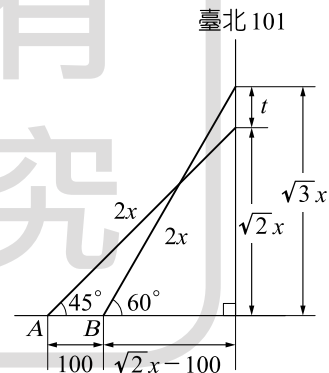
$$\text{故數對 } (a, b)=(2, 5\sqrt{2}).$$

15. 77

出處：第二冊〈三角比〉

目標：簡易三角測量

解析：如下圖所示，令兩者間的距離為 $2x$ ，所求為 t



$$\text{則 } \sqrt{3}(\sqrt{2}x-100)=\sqrt{3}x \text{ 且 } t=(\sqrt{3}-\sqrt{2})x$$

$$\Rightarrow t=(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \times \frac{100}{\sqrt{2}-1}$$

$$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1) \times 100$$

$$=100(\sqrt{6}+\sqrt{3}-2-\sqrt{2})$$

$$\approx 100 \times 0.767 = 76.7 \approx 77$$

故所求為 77 公尺。

16. 356

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：餘式定理的觀念，以及綜合除法求餘式的運算能力

解析：原式化為 $5x^7+17x^6-123x^5-99x^4+3x^3-7x^2+5x$

可將題意轉為

$$f(x)=5x^7+17x^6-123x^5-99x^4+3x^3-7x^2+5x,$$

求 $f(4)$ 的值

利用綜合除法得

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} 5 & 17 & -123 & -99 & 3 & -7 & 5 & 0 \\ & 20 & 148 & 100 & 4 & 28 & 84 & 356 \\ \hline 5 & 37 & 25 & 1 & 7 & 21 & 89 & 356 \end{array}$$

故所求的餘式為 356。

17. 512

出處：第一冊〈多項式函數〉、第二冊〈數列與級數〉
目標：三次函數的一次近似的觀念與運算，以及等比數列的觀念
解析：已知 $y=f(x)$ 在 $(q, -q)$ 附近的圖形會近似於直線
 $y=3x-32$
 $y-(-q)=3(x-q) \Rightarrow y=3x-4q$ 與 $y=3x-32$ 同義
 $\therefore 4q=32 \Rightarrow q=8$
又 p, q, r 成等比數列
則 $p \times r = q^2$
故 $p \times q \times r = q^3 = 8^3 = 512$ 。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (4)

出處：第一冊〈多項式函數〉
目標：對函數的基本認識與運算
解析：直接代入 $f(5)=5^3+47 \times 5-360=0$
故選(4)。
〈另解〉利用綜合除法

1	+0	+47	-360	5
	+5	+25	+360	
1	+5	+72	0	

可知 $f(5)=0$ ，故選(4)。

19. 4960

出處：第二冊〈數列與級數〉
目標：對級數公式的基本認識與操作
解析：將原式提出公因數，即
 $2^2+4^2+6^2+\cdots+30^2$
 $=2^2 \times (1^2+2^2+3^2+\cdots+15^2)$
 $=4 \times \frac{15 \times (15+1) \times (2 \times 15 + 1)}{6}$
 $=4960$ 。

◎評分原則

將原式提出公因數，即
 $2^2+4^2+6^2+\cdots+30^2$
 $=2^2 \times (1^2+2^2+3^2+\cdots+15^2)$ (1 分)
 $=4 \times \frac{15 \times (15+1) \times (2 \times 15 + 1)}{6}$ (2 分)
 $=4960$ 。 (1 分)

20. (10, 5)

出處：第一冊〈多項式函數〉、第二冊〈數列與級數〉
目標：對三次多項式方程式求解的認識與運算
解析：②式可化為 $\frac{m(m+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ，
其中 $m=15-n$
兩邊同乘 6 後可化為 $3(15-n)(16-n)=n(n+1)(2n+1)$
展開後化簡得 $n^3+47n-360=0$
根據第 18. 題之結論， $n=5$ 為 $n^3+47n-360=0$ 之一實數解
即 $n^3+47n-360=(n-5)(n^2+5n+72)=0$ 有一實數解
 $n=5$ ，
得 $n=5$ 且 $m=10$
故數對 $(m, n)=(10, 5)$ 。

◎評分原則

②式可化為 $\frac{m(m+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ， (2 分)
其中 $m=15-n$
兩邊同乘 6 後可化為 $3(15-n)(16-n)=n(n+1)(2n+1)$
展開後化簡得 $n^3+47n-360=0$ (2 分)
根據第 18. 題之結論， $n=5$ 為 $n^3+47n-360=0$ 之一實數解 (2 分)
即 $n^3+47n-360=(n-5)(n^2+5n+72)=0$ 有一實數解
 $n=5$ ，
得 $n=5$ 且 $m=10$ (2 分)
故數對 $(m, n)=(10, 5)$ 。