

國立彰化高級中學 114 學年度科學班甄選實驗實作

【數學科】 試題卷

■ 答案需化成最簡型式、分數需化為最簡分數、填充題全對給分。

■ 計算證明題需詳列過程，否則不給分。

填充題 1-10 題每題 6 分。

1. 設 a, b 為正整數且 $a < b$ ，若 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{113}$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

2. $(1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2023 + 2025)^3$ 除以 5 的餘數為_____。

3. n 是正整數，滿足「 $n + 2$ 是 $3(n + 3)(n^2 + 2)$ 的因數」的所有可能 n 之總和為_____。

4. $\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \frac{1}{112} + \frac{1}{180} + \frac{1}{264}}{\frac{15}{28} + \frac{19}{45} + \frac{23}{66}} =$ _____。

5. 正方形 $ABCD$ ，已知 E, F 分別為線段 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 上的點，且 $\overline{EF} = 6$ 、 $\overline{DF} = 8$ 、 $\angle EFD = 90^\circ$ ，則正方形 $ABCD$ 的面積為_____。

6. 設 $a_1, a_2, \dots, a_{114}$ 皆為整數，且滿足下列條件：

(1) 對 $k = 1, 2, \dots, 114$ ， $-1 \leq a_k \leq 2$

(2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_{114} = 50$

(3) $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{114}^2 = 100$

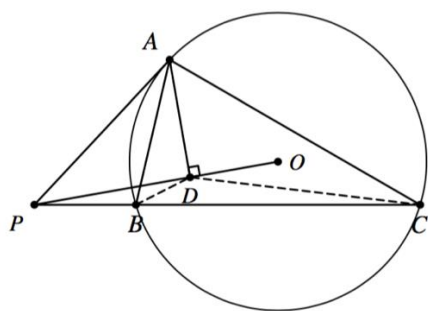
令 $a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_{114}^3$ 的最小值為 m 和最大值為 M ，則 $(M, m) =$ _____。

7. 令 $X = 5^{120} - 1$ ，則在 X 的標準分解式中，2 的次方數為_____。

8. 將 5 個箱子編號為 1,2,3,4,5，另將 5 個球編號為 1,2,3,4,5。今規定編號 i 的球只能放入編號 $1,2,\dots,i$ 的箱子，其中 $i = 1,2,3,4,5$ 。求恰有一個空箱子的放球方法數為_____。

9. 矩形 $ABCD$ ，已知 E 為線段 $\overline{BC}$ 上的點， P 為矩形 $ABCD$ 內部一點，且 $\overline{AB} = 8$ 、 $\overline{AD} = 12$ ，則 $\overline{PA} + \overline{PD} + \overline{PE}$ 的最小值為_____。

10. 如下圖，自圓 O 外一點 P 做切線交圓 O 於 A 點， $\overline{PC}$ 為圓 O 的割線分別交圓 O 於 B 點和 C 點，且 D 是 $\overline{OP}$ 上之點使得 $\overline{AD} \perp \overline{OP}$ 。若圓半徑長為 3 且 $\overline{OP} = 5$ ，則 $\overline{BD} \times \overline{CD} =$ _____。



計算證明題每題 10 分，需詳列過程，否則不給分。

1. 設方程式 $x^3 - 3x^2 + 6x - 7 = 0$ 的三根為 α 、 β 、 γ ，即

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 7 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma), \text{ 則 } (1 - \alpha\beta)(1 - \beta\gamma)(1 - \alpha\gamma) = ?$$

2. 144 的正因數由小到大排列為 d_1 、 d_2 、 $\dots$ 、 d_k ，則 $\frac{1}{12+d_1} + \frac{1}{12+d_2} + \dots + \frac{1}{12+d_k} = ?$

3. 設 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 n ($n > 1$) 個相異正整數，求證：

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} < 2.$$

4. 給定平面上三角形 $\triangle ABC$ ，令 O, I 分別為 $\triangle ABC$ 的外心、內心，且 R, r 分別為外接圓半徑、內切圓半徑，以及 $d = \overline{OI}$ ，試證明： $d^2 = R(R - 2r)$ 。